

T H È M E N° 4
Produits scalaires

26 mars 2026

OBJECTIF : Réviser les produits scalaires et projections orthogonales ▷ [VIII](#), les endomorphismes autoadjoints et isométries vectorielles ▷ [XII](#), et même la hessienne ▷ [XV](#).

A • L'inégalité de Cauchy-Schwarz est :

- vraie sur tout $\mathbb{R}$ -*ev* de dimension finie ou infinie muni d'un produit scalaire, *i.e.* d'une forme $\boxed{\text{B}}\boxed{\text{S}}\boxed{\text{D}}\boxed{\text{P}}$.
- utile pour mq les fonctions ζ de Riemann et Γ d'Euler sont log-convexes ▷ [TD8.10 & TD13.8](#). Utile aussi pour mq tout produit scalaire est une application continue, même sur un *ev* de dimension infinie ▷ [XI.41&42](#). Utile encore pour mq $h^T A h = o(h)$ ▷ [TD15.8](#).
- encore vraie si la forme est $\boxed{\text{B}}\boxed{\text{S}}\boxed{\text{P}}$ mais $\boxed{\mathcal{D}}$. Ça sert dans L_2 ▷ [VIII.7.3](#) (dans L_p ▷ [TD11.7](#), l'inégalité de Cauchy-Schwarz devient l'inégalité de Hölder et l'inégalité triangulaire devient l'inégalité de Minkowski). Ça sert aussi pour la covariance ▷ [XIV.8&9](#). Le théorème de Pythagore ▷ [VIII.12&13](#) aussi a son analogue en proba ▷ [XIV.13](#) (l'hypothèse « vecteurs $\perp$ deux à deux » est remplacée par « v.a. $\perp$ deux à deux »).

Exercice 13 (oral Mines-Ponts MP/MPI 2022). Soit X une v.a. positive possédant un moment d'ordre 2 tel que $E(X^2) \neq 0$. Soit $\lambda \in]0, 1]$.

1. Soit, pour tout événement A , la variable aléatoire $1_A : \omega \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$, *id est* la fonction indicatrice de l'ensemble A . Montrer que

$$(1 - \lambda)E(X) \leq E \left[X 1_{(X \geq \lambda E(X))} \right].$$

2. Prouver l'inégalité de PALEY-ZYGMUND :

$$(1 - \lambda)^2 \frac{E(X)^2}{E(X^2)} \leq P(X \geq \lambda E(X)).$$

B • Le caractère défini $\boxed{\text{D}}$ d'un produit scalaire est :

- nécessaire pour mq l'inégalité de Cauchy-Schwarz est une égalité *ssi* les vecteurs sont colinéaires.
- utile pour prouver qu'un vecteur est nul. Cela permet de mq $(\text{ev } E)^\perp = \{0_E\}$, de mq les matrices carrées A et $A^T A$ ont le même noyau ▷ [TD2.10q.3 & DS5pb1q2c](#), de mq toute isométrie est linéaire et injective ▷ [XII.8](#), de mq un endomorphisme normal a les mêmes valeurs propres et vecteurs propres que son adjoint ▷ [TD 12.11 & oralCCINP63](#).

- délicat à prouver. On utilise parfois le « théorème de l'intégrale nulle » ($\int_I f(t) dt = 0 \implies \forall t \in I, f(t) = 0$ si la fonction f est continue et ne change pas de signe $\triangleright$ [VIII.4](#) et $\triangleright$ [TD8.8 & Colle 12.1](#) (deux exercices qui utilisent une même astuce). On utilise aussi qu'un polynôme est nul : si le nombre de ses racines est strictement supérieur à son degré ou : s'il possède une infinité de racines $\triangleright$ [VIII.5 & TD8.6q1](#).

C • Réviser les **projections orthogonales**.

Savoir calculer la matrice M , dans une base $\mathcal{B}$, d'une projection orthogonale $\triangleright$ [VIII.22](#) sans oublier, avant d'appliquer la formule de la projection orthogonale $\triangleright$ [VIII.21](#), d'orthonormaliser la base du *sev* F sur lequel on projette grâce à l'algorithme de Gram-Schmidt.

Ne pas oublier de vérifier, pour éprouver le résultat du calcul, que : $M^2 = M$, $\text{tr} M = \dim F$ $\triangleright$ [II.11](#) et, si la base $\mathcal{B}$ est orthonormée, $M^T = M$ $\triangleright$ [XII.13](#).

Exercice 14 (tiré de CENTRALE-SUPÉLEC MATHS 2 PSI 2011).

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $Z = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$, $J = ZZ^T \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ et $P = I_n - \frac{1}{n}J \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$. On munit $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$

du produit scalaire $\langle X, Y \rangle = X^T Y$ et $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ du produit scalaire $(M | N) = \text{Tr}(M^T N)$.

1. Soit π l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$ représenté dans la base canonique par la matrice P .

- (a) Montrer que π est un projecteur.
- (b) Montrer que $\text{Vect}(Z) \subset \text{Ker}(\pi)$ et $\text{Vect}(Z)^\perp \subset \text{Im}(\pi)$.

En déduire le noyau et l'image de π .

Le projecteur π est-il une projection orthogonale ?

2. On considère l'endomorphisme Φ de $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ défini par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R}), \quad \Phi(M) = PMP.$$

- (a) Montrer que Φ est un projecteur.
- (b) Montrer que Φ est un endomorphisme autoadjoint.

Est-ce une projection orthogonale ?

- (c) Montrer que :

$$\text{Im}(\Phi) = \{M \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R}) \mid MZ = M^T Z = 0\}.$$

D • Si F est un *sev* d'un espace préhilbertien E , alors : d'une part F et $F^\perp$ sont en somme directe, d'autre part $F \subset (F^\perp)^\perp$ $\triangleright$ [VIII.17](#). Si, de plus, le *sev* F est de dimension finie (et même si l'*ev* E est de dimension infinie), alors : F et $F^\perp$ sont supplémentaires et ceci implique que $F = (F^\perp)^\perp$ $\triangleright$ [VIII.23](#) (et sa preuve) & $\triangleright$ [Colle12.1](#) (la remarque à la fin du corrigé).

E • Le **théorème des moindres carrés** $\triangleright$ [VIII.24&25](#) permet de définir et de calculer la distance $d(x, F)$ entre un vecteur $x \in E$ et un *sev* F de dimension finie d'un espace préhilbertien E .

À noter que cette distance est un cas particulier de la distance $d(x, A)$ entre un vecteur x et une partie A non vide d'un *evn* E $\triangleright$ [Kdo02/02/2026](#) (le corrigé de la *q5c* utilise le « théorème de l'intégrale nulle »). Cette

dernière distance est un *inf* (pas nécessairement atteint) tandis que la première est un *min* (global et atteint en un unique vecteur : le projeté orthogonal de x sur F).

F • Le **théorème de représentation de Riesz** $\triangleright$ [VIII.29](#) est vrai en dimension finie, parfois faux en dimension infinie $\triangleright$ [TD 8.8](#). Il permet de définir l'adjoint $\triangleright$ [XII.14](#), le gradient $\triangleright$ [XV.17](#) et le produit vectoriel $\triangleright$ [TD12.12q1](#).

G • Reconnaître une **isométrie vectorielle** ou un **endomorphisme autoadjoint** grâce à sa matrice dans une bon $\triangleright$ [XII.10&12](#). Ou sans la matrice $\triangleright$ [XII.9&11](#). Reconnaître qu'une matrice symétrique est positive voire définie positive $\triangleright$ [XII.23](#) grâce à son spectre $\triangleright$ [XII.24](#).

Exercice 15 (tiré de CENTRALE-SUPÉLEC MATHS 2 MP 2011).

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note $A^{(i)}$ la matrice carrée d'ordre i extraite de A , constituée par les i premières lignes et les i premières colonnes de A . On dira que $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ vérifie la propriété $\mathcal{P}_n$ si $\det(A^{(i)}) > 0$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On veut démontrer l'équivalence suivante :

$$A \text{ est définie positive} \iff A \text{ vérifie } \mathcal{P}_n.$$

1. On suppose que $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est définie positive. Montrer que A vérifie la propriété $\mathcal{P}_n$.
2. Dans les cas particuliers $n = 1$ et $n = 2$, montrer directement que toute matrice $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ vérifiant la propriété $\mathcal{P}_n$ est définie positive.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que toute matrice de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ vérifiant la propriété $\mathcal{P}_n$ est définie positive. On considère une matrice A de $\mathcal{S}_{n+1}(\mathbb{R})$ vérifiant la propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ et on suppose par l'absurde que A n'est pas définie positive.
 - (a) Montrer alors que A admet deux vecteurs propres linéairement indépendants associés à des valeurs propres (non nécessairement distinctes) strictement négatives.
 - (b) En déduire qu'il existe $X \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$ dont la dernière composante est nulle et tel que $X^T A X < 0$. Conclure.
4. Soit A une matrice de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. A-t-on l'équivalence suivante :

$$A \text{ est positive} \iff \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \det(A^{(i)}) \geq 0 ?$$

H • Pour explorer le lien entre matrices symétriques et calcul différentiel, réviser la hessienne $\triangleright$ [XV.39&40](#). Et le quotient de Rayleigh $\triangleright$ [TD8.3&12.5](#) :

Exercice 16. Soient un entier $n \in \mathbb{N}^*$, une matrice symétrique $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et f la fonction définie, pour tout vecteur colonne de l'ouvert $U = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, par

$$f(X) = \frac{X^T A X}{X^T X} = \frac{\langle X, A X \rangle}{\|X\|^2}$$

en notant $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire usuel sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\|\cdot\|$ la norme associée.

1. Montrer que la fonction f est bornée et atteint ses bornes.
2. Montrer que la fonction f est différentiable sur U et que, pour tout $X \in U$,

$$\nabla f(X) = 2 \frac{\|X\|^2 A X - \langle A X, X \rangle X}{\|X\|^4}.$$

3. En déduire que X est un point critique de la fonction f ssi X est un vecteur propre de la matrice A .