

THÈME 4 : PRODUITS SCALAIRES

Corrigé de l'exercice 13 (oral Mines-Ponts MP/MPI 2022)

27 mars 2026

Soit X une v.a. positive possédant un moment d'ordre 2 tel que $E(X^2) \neq 0$. Soit $\lambda \in]0, 1]$.

- 1) Soit, pour tout événement A , la variable aléatoire $1_A : \omega \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$, *id est* la fonction indicatrice de l'ensemble A . Montrer que

$$(1 - \lambda)E(X) \leq E \left[X 1_{(X \geq \lambda E(X))} \right].$$

- 2) Prouver l'inégalité de PALEY-ZYGMUND :

$$(1 - \lambda)^2 \frac{E(X)^2}{E(X^2)} \leq P(X \geq \lambda E(X)).$$

- 1) Notons A l'événement $(X \geq \lambda E(X))$. La v.a. X possède une espérance car elle possède un moment d'ordre deux par hypothèse $\triangleright$ [lemme X.25](#). Et $X 1_A \in L^1$ car $|X 1_A| \leq |X|$. De même pour $X 1_{\bar{A}}$.

D'une part, $X = X 1_A + X 1_{\bar{A}}$, d'où $E(X) = E(X 1_A) + E(X 1_{\bar{A}})$ par linéarité de l'espérance. D'autre part, $X 1_{\bar{A}} = X 1_{(X < \lambda E(X))} \leq \lambda E(X)$ car la v.a. X est positive. D'où $E(X 1_{\bar{A}}) \leq \lambda E(X)$ par croissance de l'espérance. Donc $(1 - \lambda)E(X) \leq E(X 1_A)$.

- 2) D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $|E(X 1_A)| \leq \sqrt{E(X^2)} \sqrt{E(1_A^2)}$ car $\triangleright$ [proposition XIV.9](#) les v.a. X^2 et $(1_A)^2$ possèdent une espérance (pour la v.a. X^2 , c'est une hypothèse ; pour la v.a. $(1_A)^2$, c'est parce qu'elle est bornée $\triangleright$ [remarque X.18\(4\)](#)). D'une part, le réel $E(X 1_A)$ est positif car la v.a. X est positive par hypothèse. D'autre part, $1_A^2 = 1_A$ et $E(1_A) = P(A)$. D'où $E(X 1_A)^2 \leq E(X^2)P(A)$, ce qui prouve l'inégalité de Paley-Zygmund en divisant par $E(X^2)$ qui est strictement positif par hypothèse.