

CORRIGÉ DU KDO DU 27 / 03 / 2026

Variables aléatoires

27 mars 2026

Retour à l'origine d'une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$

(tiré de CCINP PC 2020)

On étudie le déplacement aléatoire d'un pion sur l'axe $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs. À l'étape $n = 0$, le pion se trouve en 0. Ensuite, si le pion se trouve à l'étape n sur l'entier $x \in \mathbb{Z}$, alors à l'étape $n + 1$, le pion a une chance sur deux de se trouver en $x + 1$ et une chance sur deux de se trouver en $x - 1$.

Pour modéliser cette expérience aléatoire, on se place sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et on considère une suite $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires réelles indépendantes dont la loi est donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(X_k = 1) = P(X_k = -1) = \frac{1}{2}.$$

On considère également la suite de variables aléatoires réelles $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $S_0 = 0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \sum_{k=1}^n X_k.$$

L'objectif est de déterminer la loi de la variable aléatoire T à valeurs dans $T(\Omega) = \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$, appelée *temps de retour à l'origine* et définie de la façon suivante : si $S_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, alors $T = \infty$. Et $T = \min\{n \in \mathbb{N}^* | S_n = 0\}$ sinon.

On définit finalement les suites $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad p_n = P(S_n = 0) \quad \text{et} \quad q_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ P(T = n) & \text{si } n > 0. \end{cases}$$

- 1) Déterminer p_n pour tout entier n impair.
- 2) Soient $n \in \mathbb{N}$, $Y_k = \frac{X_k + 1}{2}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et $Z_n = Y_1 + \dots + Y_n$. Déterminer la loi de la variable aléatoire $Z_n = Y_1 + \dots + Y_n$.
- 3) Exprimer S_n en fonction de Z_n et en déduire que :

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad p_{2m} = \binom{2m}{m} \frac{1}{4^m}.$$

- 4) Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n$ pour tout $x \in]-1, +1[$. Justifier que la fonction f est bien définie et montrer que :

$$\forall x \in]-1, +1[, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

- 5) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p_n = \sum_{k=0}^n p_k q_{n-k}.$$

▷ Comme dans le Kdo du 22/11/2025 q2, « remettre le compteur à zéro ».

- 6) Soit $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n$ pour tout $x \in]-1, +1[$. Justifier que la fonction g est bien définie et montrer que :

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad f(x)g(x) = f(x) - 1.$$

- 7) En déduire q_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
 8) Déterminer la valeur de $P(T = \infty)$.
 9) La variable aléatoire T possède-t-elle une espérance? ▷ Théorème de la limite de la dérivée.

- 1) La v.a. S_n mesure la position du pion, qui est initialement à l'origine. Si n est impair, alors l'événement $(S_n = 0)$ est

impossible, donc sa probabilité p_n est nulle. Donc

$$p_n = 0 \text{ si } n \text{ est impair.}$$

- 2) La v.a. Y_k prend la valeur 1 si le pion va vers la droite et vaut 0 sinon. La v.a. Z_n compte donc le nombre de succès (*i.e.* pas vers la droite) parmi n essais (*i.e.* pas). Or les pas sont des épreuves de Bernoulli indépendantes et la probabilité de chaque succès est $\frac{1}{2}$, donc $Z_n \sim \mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$ ▷ proposition X.8. Donc $Z_n(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$ et $\forall k \in Z_n(\Omega)$, $P(Z_n = k) = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{n-k} = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

AUTRE RÉDAC : les v.a. Y_k sont indépendantes et suivent la loi binomiale $\mathcal{B}(1, \frac{1}{2})$. Donc, par stabilité de la loi binomiale,

$$Z_n \sim \mathcal{B}(n, \frac{1}{2}) \quad \text{▷ XIV.5.}$$

- 3) Les fonctions S_n et $2Z_n - n$ sont égales, d'où les événements $(S_{2m} = 0)$ et $(2Z_{2m} - 2m = 0)$ sont égaux. Donc $p_{2m} =$

$$P(Z_{2m} = m). \text{ Or } Z_{2m} \text{ suit la loi } B\left(2m, \frac{1}{2}\right), \text{ donc } p_{2m} = \binom{2m}{m} \left(\frac{1}{2}\right)^m \left(1 - \frac{1}{2}\right)^m. \text{ Donc } p_{2m} = \binom{2m}{m} \frac{1}{4^m}.$$

- 4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|p_n| \leq 1$ car p_n est la probabilité d'un événement. Or la série entière $\sum x^n$ a pour rayon de convergence 1, le

rayon de convergence de la série entière $\sum p_n x^n$ est donc supérieur à 1. Par suite,

le réel $f(x)$ est défini pour tout $x \in]-1, +1[$.

De plus ▷ IX.4 : $(2m)! = 2 \times 4 \times \dots \times (2m) \times 1 \times 3 \times \dots \times (2m-1) = 2^m m! \prod_{k=1}^m (2k-1)$, d'où :

$$\begin{aligned} p_{2m} &= \frac{2^m m!}{(m!)^2 4^m} \prod_{k=1}^m (2k-1) \\ &= \frac{1}{m! 2^m} \prod_{k=1}^m (2k-1) \\ &= \frac{(-1)^m}{m!} \prod_{k=1}^m \left(-k + \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

pour tout $m \in \mathbb{N}^*$. Or $\forall u \in]-1, 1[$, $(1+u)^{-1/2} = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\prod_{k=1}^m \left(\frac{-1}{2} - k + 1\right) \right) \frac{u^m}{m!}$, donc $\forall x \in]-1, +1[, f(x) = (1-x^2)^{-1/2}$.

- 5) Les événements $(T > n)$ et $(T = i)$ pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ont une union disjointe et certaine, donc

$$\begin{aligned} p_n &= \sum_{i=1}^n P(S_n = 0 | T = i) q_i + P(S_n = 0 \cap T > n) \text{ d'après la formule des proba. totales} \\ &= \sum_{i=1}^n P(S_n = 0 | T = i) q_i \text{ car l'événement } (S_n = 0) \cap (T > n) \text{ est impossible} \\ &= \sum_{i=0}^n P(S_n = 0 | T = i) q_i \text{ car } q_0 = 0 \text{ par hypothèse} \\ &= \sum_{k=0}^n P(S_n = 0 | T = n-k) q_{n-k}. \end{aligned}$$

Enfin $P(S_n = 0 | T = n-k) = P(S_k = 0)$ car l'événement $(T = n-k) \ll$ remet le compteur à zéro $\gg$.

Donc
$$p_n = \sum_{k=0}^n p_k q_{n-k} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

- 6) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|q_n| \leq 1$ car q_n est la probabilité d'un événement. Or la série entière $\sum x^n$ a pour rayon de convergence 1, le

rayon de convergence de la série entière $\sum q_n x^n$ est donc supérieur à 1. Par suite,

le réel $g(x)$ est défini pour tout $x \in]-1, +1[$.

Pour tout $x \in]-1, +1[$, on multiplie l'égalité de la question 5 par x^n ; puis on peut sommer car la série $\sum p_n x^n$ converge d'après la question 4 : $\sum_{n=1}^{\infty} p_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n p_k q_{n-k} \right) x^n$. Or $p_0 = 1$ et $q_0 = 0$, donc $\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n - 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n p_k q_{n-k} \right) x^n$.

Le membre de gauche est égal à $f(x) - 1$. Celui de droite est égal à $f(x)g(x)$ produit de Cauchy car on a montré que les séries $\sum p_n x^n$ et $\sum q_n x^n$ convergent absolument. (AUTRE RÉDAC : car on a montré que les rayons de convergence des séries entières

$\sum p_n x^n$ et $\sum q_n x^n$ sont supérieurs à 1). Donc

$$f(x) - 1 = f(x)g(x) \text{ pour tout } x \in]-1, +1[.$$

- 7) De la question précédente et de la question 4, on tire que : $\frac{g(x)}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1$ et donc $g(x) = 1 - \sqrt{1-x^2}$ pour tout $x \in]-1, +1[$. Or $\sqrt{1-x^2} = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{m2^{2m-1}} \binom{2m-2}{m-1} x^{2m}$ pour tout $x \in]-1, +1[$.

Donc, par unicité des coefficients du DSE :

$$q_n = 0 \text{ si } n \text{ est impair et, pour tout } m \in \mathbb{N}^*, q_{2m} = \frac{1}{m2^{2m-1}} \binom{2m-2}{m-1}.$$

- 8) L'événement $(T = \infty)$ est le contraire de l'événement $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} (T = n)$. Or cette union est disjointe, d'où, par σ -additivité : la série $\sum q_n$ converge et $P(T = \infty) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} q_n$.

Parce que la série $\sum q_n$ converge, le théorème radial d'Abel nous assure que $\sum_{n=1}^{\infty} q_n = \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x)$ qui est égale à 1 d'après

l'expression de $g(x)$ trouvée à la question précédente. Donc

$$P(T = \infty) = 0$$

: il est presque certain que le pion repasse

par l'origine.

- 9) La v.a. T n'admet pas d'espérance car la fonction g est la fonction génératrice G_T de la v.a. T et elle n'est pas dérivable en 1 d'après le théorème de la limite de la dérivée car $g'(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} +\infty$.