

CORRIGÉ DU D.S. N° 9 DE MATHÉMATIQUES

Durée : 2 heures.

PROBLÈME 1

Partie A - les polynômes de Tchebychev

- 1) Par récurrence, on prouve que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$.

La propriété est vraie aux rangs 0 et 1 car $T_0(\cos \theta) = 1 = \cos(0\theta)$ et $T_1(\cos \theta) = \cos \theta = \cos(1\theta)$.

Si la propriété est vraie aux rangs n et $n+1$, alors elle est vraie au rang $n+2$ car $T_{n+2}(\cos \theta) = 2 \cos \theta T_{n+1}(\cos \theta) - T_n(\cos \theta) = 2 \cos \theta \cos(n+1)\theta - \cos n\theta$. Or $\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2 \cos a \cos b$ pour tous réels a et b , et en particulier pour $a = (n+1)\theta$ et $b = \theta$. D'où $T_{n+2}(\cos \theta) = \cos(n+2)\theta$.

La propriété est donc vraie à tout rang $n \in \mathbb{N}$.

- 2) Soit $x \in [-1, +1]$: posons $\theta = \text{Arccos}(x)$. Alors $\cos \theta = x$ et, d'après la question 1,

$$T_n(x) = T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta) = \cos(n \cdot \text{Arccos}(x)).$$

- 3) La fonction Arccos est dérivable sur $] -1, +1[$ et, pour tout $x \in] -1, +1[$, $\text{Arccos}'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.

D'où $T'_n(x) = \frac{d}{dx} \cos(n \cdot \text{Arccos}(x)) = -\sin(n \cdot \text{Arccos}(x)) \frac{-n}{\sqrt{1-x^2}}$ et

$$\begin{aligned} T''_n(x) &= \frac{d}{dx} \sin(n \cdot \text{Arccos}(x)) \cdot \frac{n}{\sqrt{1-x^2}} + \sin(n \cdot \text{Arccos}(x)) \cdot \frac{d}{dx} \frac{n}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= -\cos(n \cdot \text{Arccos}(x)) \cdot \frac{n^2}{1-x^2} + \sin(n \cdot \text{Arccos}(x)) \cdot \frac{nx}{\sqrt{1-x^2}^3} \end{aligned}$$

On en déduit que, pour tout $x \in] -1, +1[$,

$$(1-x^2)T''_n(x) - xT'_n(x) + n^2T_n(x) = 0 \quad (\mathcal{E}_n)$$

Partie B - un produit scalaire

- 4) L'intégrale $\int_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ est convergente si, et seulement si, les deux intégrales $\int_0^{+1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ et $\int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ le sont.

PREMIÈRE MÉTHODE. Soit $a \in [0, 1[$: $\int_0^a \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = [\text{Arcsin}(x)]_0^a = \text{Arcsin}(a) \xrightarrow{a \rightarrow 1^-} \frac{\pi}{2}$. D'où la première intégrale est convergente et, de même, la deuxième.

DEUXIÈME MÉTHODE : $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1-x)(1+x)}} \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x}}$. Or $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx$ converge d'après le critère de Riemann en 0 (avec $\alpha = \frac{1}{2}$). D'où la première intégrale est convergente et, de même, la deuxième.

- 5) La fonction $x \mapsto P(x)Q(x)$ est continue sur le segment $[-1, +1]$, elle y est donc bornée. Par suite, il existe un réel M tel que : $\forall x \in [-1, +1], |P(x)Q(x)| \leq M$. D'où $\left| \frac{P(x)Q(x)}{\sqrt{1-x^2}} \right| \leq M \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ pour tout $x \in]-1, +1[$. D'après la question précédente, l'intégrale $\langle P | Q \rangle$ est donc absolument convergente.
- 6) On veut montrer que la forme $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est bilinéaire, symétrique, définie positive :

S	$\langle P Q \rangle = \int_{-1}^{+1} \frac{P(x)Q(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_{-1}^{+1} \frac{Q(x)P(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \langle Q P \rangle$
---	---

B	$\langle \alpha P + \beta Q R \rangle = \alpha \langle P R \rangle + \beta \langle Q R \rangle$ par linéarité de l'intégrale. D'où la linéarité à gauche de $\langle \cdot \cdot \rangle$ et la bilinéarité par symétrie.
---	---

P	$\langle P P \rangle = \int_{-1}^{+1} \frac{P^2(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \geq 0$ car c'est l'intégrale d'une fonction positive.
---	---

D	Supposons que $\langle P P \rangle = 0$. Alors $\int_{-1}^{+1} \frac{P^2(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = 0$. Or la fonction $x \mapsto \frac{P^2(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ est positive et continue, d'où $\forall x \in]-1, +1[, P(x) = 0$ d'après le théorème de l'intégrale nulle. Le polynôme P a donc une infinité de racines, ce qui prouve que $P = 0$.
---	--

- 7) On linéarise : si $n \neq 0$, alors $\cos^2(n\theta) = \frac{1 + \cos(2n\theta)}{2}$, d'où $\int_0^\pi \cos^2(n\theta) d\theta = \frac{1}{2} \left[\theta + \frac{\sin(2n\theta)}{2n} \right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}$.

Et, si $n = 0$, alors $\int_0^\pi \cos^2(n\theta) d\theta = \int_0^\pi 1 d\theta = \pi$.

Or $\|T_n\| = \sqrt{\langle T_n | T_n \rangle}$ et $\langle T_n | T_n \rangle = \int_{-1}^{+1} \frac{T_n^2(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$. Changeons de variable : $x = \cos \theta$. La fonction $\theta \mapsto \cos \theta$ étant de classe $\mathcal{C}^1$, $\int_{-1}^{+1} \frac{T_n^2(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_\pi^0 \frac{T_n^2(\cos \theta)}{\sqrt{1-\cos^2 \theta}} (-\sin \theta) d\theta = \int_0^\pi \cos^2(n\theta) d\theta$ car $\sqrt{1-\cos^2 \theta} = \sqrt{\sin^2 \theta} = |\sin \theta| = \sin \theta$ pour tout $\theta \in]0, \pi[$.

Donc $\|T_n\| = \sqrt{\pi/2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Et $\|T_0\| = \sqrt{\pi}$.

Partie C - un endomorphisme

- 8) D'une part, φ est linéaire car, pour tous α, β dans $\mathbb{R}$ et P, Q dans $\mathbb{R}_n[X]$,

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha P + \beta Q) &= X(\alpha P' + \beta Q') - (1 - X^2)(\alpha P'' + \beta Q'') \\ &= \alpha [XP' - (1 - X^2)P''] + \beta [XQ' - (1 - X^2)Q''] \\ &= \alpha \varphi(P) + \beta \varphi(Q). \end{aligned}$$

D'autre part, pour chaque $k \geq 2$, $\varphi(X^k) = XkX^{k-1} - (1 - X^2)k(k-1)X^{k-2} = k^2X^k - k(k-1)X^{k-2}$. De plus $\varphi(1) = 0$ et $\varphi(X) = X$. Par suite, $\forall k \leq n$, $\varphi(X^k) \in \mathbb{R}_n[X]$. D'où $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par φ .

Par récurrence, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\deg(T_k) = k$. N.B. :
 $\forall k \in \mathbb{N}, \forall \lambda, T_k \in \mathbb{R}_k[X]$.

Donc φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

- 9) De la question 3, il résulte que tous les réels de $] -1, +1[$ sont des racines du polynôme $(1 - X^2)T_k'' - XT_k' + k^2T_k$. Ce polynôme est donc nul car il possède une infinité de racines. On vient de montrer que $(1 - X^2)T_k'' - XT_k' + k^2T_k = 0$. D'où $XT_k' - (1 - X^2)T_k'' = k^2T_k$, autrement dit : $\varphi(T_k) = k^2T_k$. Le polynôme T_k n'étant pas nul, c'est un vecteur propre de φ associé à la valeur propre k^2 .

Le spectre de φ est $\{k^2, k \in \llbracket 0, n \rrbracket\}$. Son cardinal est $n + 1 = \dim \mathbb{R}_n[X]$, donc l'endomorphisme φ est diagonalisable.

- 10) Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$:

$$\langle \varphi(P) | Q \rangle = \int_{-1}^{+1} [xP'(x) - (1 - x^2)P''(x)] Q(x) \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx = \int_{-1}^{+1} u'(x)v(x) dx,$$

où les deux fonctions $u : x \mapsto -P'(x)\sqrt{1 - x^2}$ et $v : x \mapsto Q(x)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -1, +1[$. D'où, en intégrant par parties :

$$\langle \varphi(P) | Q \rangle = [u(x)v(x)]_{-1}^{+1} - \int_{-1}^{+1} u(x)v'(x) dx = 0 + \int_{-1}^{+1} P'(x)Q'(x)\sqrt{1 - x^2} dx.$$

Par suite $\langle \varphi(Q) | P \rangle = \int_{-1}^{+1} Q'(x)P'(x)\sqrt{1 - x^2} dx$ est égal à $\langle \varphi(P) | Q \rangle$. Donc φ est un endomorphisme autoadjoint.

- 11) Soit $(j, k) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$. Si $j \neq k$, alors les polynômes T_j et T_k sont des vecteurs propres de φ associés aux valeurs propres distinctes j^2 et k^2 d'après la question 9. Or, d'après le théorème spectral, les sous-espaces propres de l'endomorphisme autoadjoint φ sont deux à deux orthogonaux. Donc $T_j \perp T_k$. Ceci est valable pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Donc les polynômes de Tchebychev sont orthogonaux deux à deux.

PROBLÈME 2 (TIRÉ DE MINES-PONTS 2020 PC MATH 2)

- 1) Soient $x > 0$ et $f : t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$.

L'intégrale $\Gamma(x)$ est impropre en 0 et en $+\infty$. Elle converge si, et seulement si, les deux intégrales $\int_0^1$ et $\int_1^{+\infty}$ convergent.

• Soit $t \in]0, 1[: f(t) \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} t^{x-1} = \frac{1}{t^{1-x}}$ qui ne change pas de signe. Or $1 - x < 1$ car $x > 0$. Donc l'intégrale $\int_0^1 f(t) dt$ est convergente d'après le critère de Riemann en 0.

• Soit $t \in [1, +\infty[: f(t) = t^{x-1}e^{-t/2} \cdot e^{-t/2} = o(e^{-t/2})$ quand $t \rightarrow +\infty$ par croissances comparées. Or $e^{-t/2}$ ne change pas de signe et $\int_0^{+\infty} e^{-t/2} dt$ converge, donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ est convergente.

La fonction Γ est donc bien définie sur $]0, +\infty[$ et elle est à valeurs strictement positives car la fon-

ction f est positive donc le réel $\Gamma(x)$ aussi par croissance de l'intégrale. Et $\Gamma(x) \neq 0$ car, par l'absurde : la fonction f est positive et continue, d'où $\Gamma(x) = 0 \implies f = 0$, d'après le théorème de l'intégrale nulle.

- 2) Soit $x > 0$. Les fonctions $u : t \mapsto t^x$ et $v : t \mapsto -e^{-t}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ et $\Gamma(x + 1) = \int_0^{+\infty} u(t)v'(t) dt$. D'une part $u(t)v(t) = -t^x e^{-t} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$ par croissances comparées, d'autre part $u(t)v(t) = -t^x e^{-t} \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} -t^x = -e^{x \ln t} \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{} 0$ car $x > 0$ et $\lim_{t \rightarrow 0^+} \ln t = -\infty$. D'où l'intégrale $\int_0^{+\infty} u'(t)v(t) dt$ est aussi convergente

et

$$\Gamma(x+1) = - \int_0^{+\infty} u'(t)v(t) dt = x \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = x\Gamma(x).$$

3) On remarque que les coefficients a_n sont non nuls. À l'aide de la question 2, si $x \neq 0$, alors

$$\left| \frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_nx^n} \right| = \frac{\Gamma(n+\alpha+2)}{(n+1)!} \frac{n!}{\Gamma(n+\alpha+1)} |x| = \frac{n+\alpha+1}{n+1} |x| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} |x|.$$

D'après la règle de d'Alembert,

$$R = 1.$$

4) Soit $x \in]-1, 1[$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{+\infty} \frac{x^n}{n!} t^{n+\alpha} e^{-t} dt.$$

Posons, pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $t \in]0, +\infty[$, $f_n(t) = \frac{x^n}{n!} t^{n+\alpha} e^{-t}$. On utilise le théorème d'intégration terme à terme sur un intervalle quelconque :

- chaque fonction f_n est *cpm* et intégrable.
- la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement. En effet, $f_n(t) = e^{-t} t^\alpha \frac{(xt)^n}{n!}$ et la série numérique $\sum \frac{(xt)^n}{n!}$ est convergente, de somme $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(xt)^n}{n!} = e^{xt}$. Donc la série numérique $\sum f_n(t)$ est convergente

et sa somme est $S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) = e^{-t} t^\alpha e^{xt} = t^\alpha e^{-(1-x)t}$. Cette fonction S est *cpm*

- la série numérique $\sum \int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt$ est convergente. En effet, les f_n étant positives, il s'agit de la série $\sum a_n x^n$, qui est absolument convergente puisque $|x| < 1$.

Donc la fonction S est intégrable sur $]0, +\infty[$ et

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) dt = \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) dt = \int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-(1-x)t} dt.$$

Enfin l'application $t \mapsto (1-x)t$ est strictement croissante (car $x \in]-1, 1[$) et de classe $\mathcal{C}^1$. D'où, avec le changement de variable $u = (1-x)t$:

$$\int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-(1-x)t} dt = \int_0^{+\infty} \left(\frac{u}{1-x} \right)^\alpha e^{-u} \frac{1}{1-x} du = \frac{1}{(1-x)^{\alpha+1}} \int_0^{+\infty} u^\alpha e^{-u} du.$$

Ainsi,

$$\text{pour tout } x \in]-1, 1[, \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(1-x)^{\alpha+1}}.$$

5) E_α est une partie de l'ev $\mathcal{C}([0, +\infty[, \mathbb{R})$ et contient l'application nulle

Soit $(f, g) \in E_\alpha^2$: pour tout $x \geq 0$, $(\lambda f + g)^2(x) = \lambda^2 f(x)^2 + g(x)^2 + 2\lambda f(x)g(x)$.

Or $|x^\alpha e^{-x} f(x)g(x)| \leq \frac{1}{2} x^\alpha e^{-x} f(x)^2 + \frac{1}{2} x^\alpha e^{-x} g(x)^2$. Les intégrales $\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} f(x)^2 dx$ et $\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} g(x)^2 dx$ étant convergentes, l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} f(x)g(x) dx$ est absolument convergente. Par conséquent,

$\lambda f + g \in E_\alpha$. Ainsi

E_α est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{C}([0, +\infty[, \mathbb{R})$.

- 6) On a prouvé à la question précédente que l'application $(f, g) \mapsto \langle f, g \rangle$ est bien définie sur $E_\alpha \times E_\alpha$. Elle est symétrique et bilinéaire. Elle est aussi positive car, pour tout $f \in E_\alpha$, $\langle f, f \rangle = \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} f(x)^2 dx \geq 0$ car $x^\alpha e^{-x} f(x)^2 \geq 0$ pour tout $x > 0$.

Supposons $\langle f, f \rangle = 0$. La fonction $x \mapsto x^\alpha e^{-x} f(x)^2$ est continue et positive sur $]0, +\infty[$, donc elle est nulle sur $]0, +\infty[$. Or $x^\alpha e^{-x} \neq 0$ pour tout $x > 0$. Par conséquent f est nulle sur $]0, +\infty[$. Et aussi en 0

car f est continue. Ainsi

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E_α .

- 7) E_α étant un espace vectoriel, il suffit de montrer qu'il contient la fonction $x \mapsto x^n$ pour chaque $n \in \mathbb{N}$. C'est le cas car $x^\alpha e^{-x} x^{2n} = o(e^{-x/2})$, la fonction $x \mapsto e^{-x/2}$ ne change pas de signe et son

intégrale converge. Donc

E_α contient les fonctions polynomiales.

- 8) Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons, pour tout $x > 0$: $u(x) = x^{n+\alpha}$ et $v(x) = e^{-x}$. Les fonctions u et v étant de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$, utilisons la formule de Leibniz. En tout $x > 0$,

$$\varphi_n^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^{(k)}(x) v^{(n-k)}(x).$$

Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$:

$$u^{(k)}(x) = \left(\prod_{j=0}^{k-1} (n-j+\alpha) \right) x^{n-k+\alpha} \quad \text{et} \quad v^{(n-k)}(x) = (-1)^{n-k} e^{-x}.$$

Par récurrence sur $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$,

$$\prod_{j=0}^{k-1} (n-j+\alpha) = \frac{\Gamma(n+1+\alpha)}{\Gamma(n-k+1+\alpha)}.$$

D'où l'on déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x > 0$:

$$\psi_n(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \frac{\Gamma(n+1+\alpha)}{\Gamma(n-k+1+\alpha)} x^{n-k} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \frac{\Gamma(n+1+\alpha)}{\Gamma(k+1+\alpha)} x^k.$$

- 9) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

En procédant comme à la question précédente, en $x > 0$:

$$\varphi_n^{(k)}(x) = \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} \frac{\Gamma(n+1+\alpha)}{\Gamma(n-j+\alpha+1)} x^{n-j+\alpha} e^{-x} = x^{\alpha+1} e^{-x} \eta_{n,k}(x)$$

où

$$\eta_{n,k}(x) = \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} \frac{\Gamma(n+1+\alpha)}{\Gamma(n-j+\alpha+1)} x^{n-j-1}.$$

La fonction $\eta_{n,k}$ est polynomiale et $\alpha+1 > 0$, d'où :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi_n^{(k)}(x) = 0.$$

Enfin, $\eta_{n,k}$ étant polynomiale, $\frac{\varphi_n^{(k)}(x)}{e^{-\frac{x}{2}}} = x^{\alpha+1} e^{-\frac{x}{2}} \eta_{n,k}(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ par croissances comparées. Ainsi :

$$\varphi_n^{(k)}(x) = o_{x \rightarrow +\infty} \left(e^{-\frac{x}{2}} \right).$$

$$10) \langle \psi_m, \psi_n \rangle = \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} \psi_m(x) x^{-\alpha} e^x \varphi_n^{(n)}(x) dx = \int_0^{+\infty} \psi_m(x) \varphi_n^{(n)}(x) dx.$$

Montrons, par récurrence sur $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, la propriété P_k :

$$L'intégrale \int_0^{+\infty} \psi_m^{(k)}(x) \varphi_n^{(n-k)}(x) dx \text{ converge et } \langle \psi_m, \psi_n \rangle = (-1)^k \int_0^{+\infty} \psi_m^{(k)}(x) \varphi_n^{(n-k)}(x) dx.$$

P_0 vient d'être établie.

Soit $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ tel que P_k soit vraie et intégrons par parties.

Les fonctions $\psi_m^{(k)}$ et $\varphi_n^{(n-k-1)}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et le terme en crochets est nul d'après la question précédente. Par conséquent, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \psi_m^{(k+1)}(x) \varphi_n^{(n-k-1)}(x) dx$ converge et :

$$\langle \psi_m, \psi_n \rangle = (-1)^k \int_0^{+\infty} \psi_m^{(k)}(x) \varphi_n^{(n-k)}(x) dx = (-1)^{k+1} \int_0^{+\infty} \psi_m^{(k+1)}(x) \varphi_n^{(n-k-1)}(x) dx.$$

P_{k+1} est donc vraie.

Ainsi P_k est vraie pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. En particulier :

$$\langle \psi_m, \psi_n \rangle = (-1)^n \int_0^{+\infty} \psi_m^{(n)}(x) \varphi_n(x) dx.$$

Soit enfin $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $m \neq n$. Quitte à utiliser la symétrie du produit scalaire, on peut supposer $m < n$. Dans ce cas, ψ_m étant polynomiale de degré m , $\psi_m^{(n)}$ est nulle et $\langle \psi_m, \psi_n \rangle = 0$. Donc

la famille $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est orthogonale.

- 11) Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente, $\|\psi_n\|_\alpha^2 = (-1)^n \int_0^{+\infty} \psi_n^{(n)}(x) \varphi_n(x) dx$. La fonction ψ_n est polynomiale de degré n , de coefficient dominant $(-1)^n$. Par suite, pour tout $x > 0$: $\psi_n^{(n)}(x) = (-1)^n n!$. Donc

$$\|\psi_n\|_\alpha^2 = (-1)^{2n} n! \int_0^{+\infty} x^{n+\alpha} e^{-x} dx = n! \Gamma(n + \alpha + 1).$$