

D.S. N° 9 DE MATHÉMATIQUES

Durée : 2 heures.

Cet énoncé contient deux problèmes.

PROBLÈME 1

Partie A - les polynômes de Tchebychev

Soit $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite des polynômes de Tchebychev définie par

$$T_0 = 1, \quad T_1 = X \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n.$$

- 1) Montrer que, pour chaque $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$. *Initialisation 1, Trig et récurrence 0,5*

- 2) Montrer que, pour tout réel $x \in [-1, +1]$, $T_n(x) = \cos(n \cdot \text{Arccos}(x))$.

- 3) En déduire que, pour tout $x \in]-1, +1[$,

$$(1 - x^2)T_n''(x) - xT_n'(x) + n^2T_n(x) = 0 \quad (\mathcal{E}_n)$$

Partie B - un produit scalaire

Pour tous polynômes P et Q à coefficients réels, on pose

$$\langle P | Q \rangle = \int_{-1}^{+1} P(x)Q(x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

- 4) Montrer que l'intégrale $\int_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ est convergente. *Deux méthodes ds le corrigé. 1, car si $\int_0^1$ et $\int_{-1}^0$ convergent.*
- 5) En déduire, pour tous polynômes P et Q dans $\mathbb{R}[X]$, la convergence de l'intégrale $\langle P | Q \rangle$.
- 6) Démontrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$. *8,5 0,5 1, théo. de l'intégrale nulle 1*
- 7) On note $\| \cdot \|$ la norme associée à ce produit scalaire. *0,5 1, 0,5 de même 1*

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, calculer $\int_0^\pi \cos^2(n\theta) d\theta$ et en déduire $\|T_n\|$. *0,5 1, 0,5*

Partie C - un endomorphisme

Soient $n \in \mathbb{N}$ et l'application φ définie par

$$\varphi(P) = XP' - (1 - X^2)P''$$

pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

- 8) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. *Linéarité 0,5 Stabilité de $\mathbb{R}_n[X]$ 0,5*
- 9) Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Montrer que T_k est un vecteur propre de φ . L'endomorphisme φ est-il diagonalisable? ** $\deg T_k = k$ 1 $\varphi(T_k) = \lambda T_k$ à trouver 1*
- 10) Montrer que, pour tous polynômes P et Q dans $\mathbb{R}[X]$, $\langle \varphi(P) | Q \rangle = \int_{-1}^{+1} P'(x)Q'(x)\sqrt{1-x^2} dx$. *2 1*

Qu'en déduire sur l'endomorphisme φ ? *0,5*

- 11) Montrer que la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des polynômes de Tchebychev est une famille orthogonale. *théor. spectral 1 (lemme x11, 20)*

* Corrigé modifié en ligne.

18 PROBLÈME 2 (TIRÉ DE MINES-PONTS 2020 PC MATH 2)

Pour tout réel x strictement positif, on pose

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

théor. de l'intégrale nulle

1) Montrer que la fonction Γ est bien définie et qu'elle est à valeurs strictement positives.

2) Montrer que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ pour tout $x > 0$.

Soit α un réel strictement supérieur à -1 . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}$.

3) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$.

4) En utilisant un théorème d'intégration terme à terme, montrer que

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(1-x)^{\alpha+1}} \text{ pour tout } x \in]-R, R[.$$

Dans la suite, on fixe un réel $\alpha > -1$, et on note E_α l'ensemble des fonctions continues $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ telles que l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} f(x)^2 dx$ est convergente.

5) Montrer que E_α est un espace vectoriel.

6) Pour tout $(f, g) \in E_\alpha^2$, on pose :

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} f(x) g(x) dx.$$

Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E_α .

7) Montrer que toute fonction polynomiale sur $[0, +\infty[$ est élément de E_α .

Pour tout entier naturel n , on définit les fonctions :

$$\varphi_n :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^{n+\alpha} e^{-x} \quad \text{et} \quad \psi_n :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^{-\alpha} e^x \varphi_n^{(n)}(x)$$

où la notation $\varphi_n^{(n)}$ désigne la dérivée d'ordre n de φ_n (avec la convention $\varphi_0^{(0)} = \varphi_0$).

8) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x > 0$:

$$\psi_n(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \frac{\Gamma(n+1+\alpha)}{\Gamma(k+1+\alpha)} x^k.$$

Dans la suite, on identifie ψ_n à son unique prolongement continu à $[0, +\infty[$, qui est une fonction polynomiale sur $[0, +\infty[$. Cela permet de considérer ψ_n comme un élément de E_α , ce qu'on fera désormais.

9) Soit n un entier ≥ 1 . Pour tout entier $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, établir que

$$\varphi_n^{(k)}(x) \rightarrow 0 \text{ quand } x \text{ tend vers } 0 \text{ par valeurs strictement positives,}$$

et que

$$\varphi_n^{(k)}(x) = o(e^{-x/2}) \text{ quand } x \rightarrow +\infty.$$

10) Soit m et n deux entiers naturels. Montrer que

$$\langle \psi_m, \psi_n \rangle = (-1)^n \int_0^{+\infty} \psi_m^{(n)}(x) \varphi_n(x) dx.$$

En déduire que la famille $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est orthogonale pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

11) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\langle \psi_n, \psi_n \rangle = n! \Gamma(n+\alpha+1)$.