Exercice 9

1.

Soit $i \in [\![1, r]\!]$.

Par définition :

Notation

$\circ$ (composée) plutôt que $\prod$ (produit)

$$p_i = \prod_{j \neq i} \frac{f - \lambda_j \, id_E}{\lambda_i - \lambda_j}.$$

D'où :

- Soit $x \in E_{\lambda_i}(f)$.

  Alors :

$$p_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{\lambda_i - \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j} x = x$$

- Soit $k \in [\![1, r]\!]$ tel que $k \neq i$, et $x \in E_{\lambda_k}(f)$.

  Alors :

$$p_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{\lambda_k - \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j} x = 0$$

car $k \neq i$, donc l'un des facteurs est nul.

De plus, comme f est diagonalisable et $Sp(f) = \{\lambda_k \mid 1 \leq k \leq r\}$, il vient :

$$E = \bigoplus_{1 \leq k \leq r} E_{\lambda_k}(f)$$

Donc comme $p_i|_{E_{\lambda_i}(f)} = id_{E|E_{\lambda_i}(f)}$, et que $\operatorname{Ker}(p_i) = \bigoplus_{\substack{1 \leq k \leq r \\ k \neq i}} E_{\lambda_k}(f)$

avec ce qui précède, il vient :

$$\boxed{\text{Pour tout } i \in [\![1, r]\!],\ p_i \text{ est le projecteur sur le sep } E_{\lambda_i}(f) \text{ parallèlement à } \bigoplus_{k \neq i} E_{\lambda_k}(f).}$$

oui

Comme $E = \bigoplus_{1 \leq k \leq r} E_{\lambda_k}(f)$ et que pour tout $i \in [\![1, r]\!]$,

$p_i|_{E_{\lambda_i}(f)} = id_E|_{E_{\lambda_i}(f)}$, il vient : $\underline{\sum_{i=1}^{r} p_i = id_E}$.

De plus : ~~$\forall i \in [\![1, r]\!]$,~~
Soit $x \in E$, que l'on décompose en $x = x_1 + x_2 + \dots + x_r$, où pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, $x_i \in E_{\lambda_i}(f)$.
Il vient :

$$\forall i \in [\![1, r]\!], \quad \cancel{\lambda_i x_i = \lambda_i p_i(x)} \quad \lambda_i p_i(x) = \lambda_i x_i = f(x_i).$$

D'où par linéarité de f : $\quad f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{r} x_i\right) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i p_i(x)$.

D'où : $\underline{\sum_{i=1}^{r} \lambda_i p_i = f}$

On montre également par récurrence en utilisant la linéarité de f qu'en reprenant les mêmes notations :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in E, \forall i \in [\![1, r]\!], \quad \lambda_i^k p_i(x) = \lambda_i^k x_i = f^k(x_i)$$

D'où : $\underline{\forall k \in \mathbb{N}, \quad \sum_{i=1}^{r} \lambda_i^k p_i = f^k}$.

2.
~~Par hypothèse sur les puissances de f, il vient~~ :
Soit Q le polynôme défini par :

$$Q = \prod_{k=1}^{s} (X - \mu_i)$$

Soit $(a_k)_{0 \leq k \leq s}$ la famille telle que : $\quad Q = \sum_{k=0}^{s} a_k X^k$.
Par hypothèse sur les puissances de f il vient :

$$Q(f) = \sum_{k=0}^{s} a_k f^k = \sum_{k=0}^{s} a_k \left(\sum_{i=1}^{s} \mu_i^k f_i\right)$$

Exercice 9 (suite)

2. (suite)

D'où :

$$Q(f) = \sum_{i=1}^{s} f_i \left(\sum_{k=0}^{s} a_k \mu_i^k\right) = \sum_{i=1}^{s} f_i \; Q(\mu_i).$$

Or par définition du polynôme Q : $\forall i \in [\![1;s]\!]$, $Q(\mu_i) = 0$.
D'où $Q(f) = 0$.

Oui

Comme par hypothèse les scalaires (μ_i) sont distincts deux à deux, le polynôme Q est un polynôme scindé à racines simples de f.

$\boxed{\text{L'endomorphisme } f \text{ est donc diagonalisable.}}$

3.
Soit $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$ les valeurs propres de f.
Comme f admet n valeurs propres distinctes, l'endomorphisme f est diagonalisable, et il vient :

$$\forall i \in [\![1;n]\!], \dim(E_{\lambda_i}) = 1 \quad (*)$$

En effet : $\forall i \in [\![1;n]\!]$, $\dim(E_{\lambda_i}) > 0$ et $\sum_{i=1}^{n} \dim(E_{\lambda_i}) = n$.

Soit alors $g \in \mathcal{C}(f)$.
Comme les endomorphismes f et g commutent, il vient pour tout $i \in [\![1;n]\!]$ que les endomorphismes $\lambda_i Id - f$ commutent, donc le sev $E_{\lambda_i} = Ker(\lambda_i Id - f)$ est stable par g.
Soit $i \in [\![1;n]\!]$.
Soit x_i ~~$\in E_{\lambda_i}$~~ un vecteur propre de f associé à la vp. λ_i.

Alors $x_i \in E_{\lambda_i}$, donc $g(x_i) \in E_{\lambda_i}$ et comme E_{λ_i} est une droite d'après (*), il vient l'existence d'un scalaire μ_i tel que $g(x_i) = \mu_i x_i$.
De plus, $x_i \neq 0$ car c'est un vecteur propre de f, donc x_i est un vecteur propre de g.

$\boxed{\text{D'où : tout vecteur propre est aussi un vecteur propre de tout endomorphisme de } \mathcal{C}(f).}$

Soit $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ une base de E telle que : $\forall i \in [\![1;n]\!]$, $E_{\lambda_i} = \mathrm{Vect}(e_i)$.
Soit $g \in \mathcal{C}(f)$. De ce qui précède, il vient que pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, e_i est un vecteur propre de g.
Donc il existe $(\mu_i) \in \mathbb{K}^{[\![1;n]\!]}$ tel que : $\forall i \in [\![1;n]\!]$, $g(e_i) = \mu_i e_i$.
Les valeurs propres de f étant distinctes deux à deux, il existe par formule d'interpolation de Lagrange un unique polynôme $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que : $\forall i \in [\![1;n]\!]$, $P(\lambda_i) = \mu_i$.
Soit un tel polynôme. Il vient :

$$\forall i \in [\![1;n]\!],\quad P(f)(e_i) = P(\lambda_i)\, e_i = \mu_i e_i = g(e_i)$$

Donc comme (e_i) est une base de E, ~~il vient~~ il vient $P(f) = g$.

$\boxed{\text{Donc il existe un unique polynôme } P \in \mathbb{K}_{n-1}[X] \text{ tel que } P(f) = g.}$ (**)

D'une part, $\mathcal{C}(f) \subset \mathcal{L}(E)$. D'autre part :
- L'endomorphisme nul commute avec f, donc $0_{\mathcal{L}(E)} \in \mathcal{C}(f)$.
- De plus : Soit $(\varphi, \psi) \in \mathcal{C}(f)$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Alors :

$$(\lambda\varphi + \psi)\circ f = \lambda \varphi\circ f + \psi\circ f = \lambda f\circ\varphi + f\circ\psi \quad \text{car } \varphi \in \mathcal{C}(f) \text{ et } \psi \in \mathcal{C}(f).$$
$$= f\circ(\lambda\varphi+\psi) \quad \text{par linéarité de } f.$$

Donc $(\alpha\varphi + \psi) \in \mathcal{C}(f)$, d'où $\boxed{\mathcal{C}(f) \text{ est un sev de } \mathcal{L}(E)}$

D'après (**), il vient de plus : ***

Inutile [$\mathcal{C}(f) = \mathrm{Vect}(f^0, f, f^2, \dots, f^{n-1})$. Donc $\boxed{\dim(\mathcal{C}(f)) = n.}$

Et cette inclusion est une égalité car, réciproquement : $\forall f \in \mathcal{L}(E)$, $\forall P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$, $P(f) \in \mathcal{C}(f)$.]

*** l'application linéaire $\mathbb{K}_{n-1}[X] \to \mathcal{C}(f)$, $P \mapsto P(f)$ est bijective. Or $\dim \mathbb{K}_{n-1}[X] = n$.