

THÈME 2 : ALGÈBRE LINÉAIRE

Corrigé de l'exercice 8

22 mars 2026

1) On note  $K$  la fonction définie de  $[0, 1]^2$  vers  $\mathbb{R}$  par :

$$K(s, t) = (1 - s)t \text{ si } 0 \leq t \leq s \leq 1 \text{ et } K(s, t) = (1 - t)s \text{ sinon}$$

et  $T$  l'application définie sur  $E = C([0, 1], \mathbb{R})$  par :

$$\forall f \in E, \forall s \in [0, 1], T(f)(s) = \int_0^1 K(s, t)f(t) dt.$$

En écrivant  $T(f)$  comme la somme de deux intégrales, montrer que  $T$  est un endomorphisme de  $E$ .

2) On munit  $E$  de la norme  $\|\cdot\|_2$  définie par :

$$\forall f \in E, \|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 |f(x)|^2 dx}.$$

Montrer que l'endomorphisme  $T$  est continu.

3) Soit  $f \in E$ . Montrer que  $T(f)$  est de classe  $C^2$  et que  $T(f)'' = -f$ .

4) Montrer que l'endomorphisme  $T$  est injectif.

5) Soient  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $E_\lambda = \text{Ker}(\lambda Id - T)$ . Montrer que, si  $f \in E_\lambda$ , alors

$$\lambda f'' + f = 0 \text{ et } f(0) = f(1) = 0.$$

6) Pour chaque  $\lambda \in \mathbb{R}$ , déterminer  $E_\lambda$ .

1) La linéarité de  $T$  résulte de la linéarité de l'intégrale. Soit  $f \in E$ . Reste à montrer que la fonction  $T(f)$  est continue :

$$\forall s \in [0, 1], T(f)(s) = (1 - s) \int_0^s tf(t) dt + s \int_s^1 (1 - t)f(t) dt \tag{*}$$

Or la fonction  $f$  est continue, d'où les fonctions  $s \mapsto \int_0^s tf(t) dt$  et  $s \mapsto -\int_1^s (1 - t)f(t) dt$  sont dérivables  $\triangleright$  III.1, donc continues et, par suite la fonction  $T(f)$  l'est aussi. Donc  $T$  est un endomorphisme de  $E$ .

2) Pour tout  $(s, t) \in [0, 1]^2$ ,  $|K(s, t)| \leq 1$ , d'où

$$\forall s \in [0, 1], |T(f)(s)| \leq \int_0^1 |f(t)| dt \leq \|f\|_2$$

grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée aux vecteurs  $f$  et  $t \mapsto 1$ . Donc, en élevant au carré et en intégrant de 0 à 1 :

$$T(f)\|_2^2 \leq \|f\|_2^2, \text{ donc } \|T(f)\|_2 \leq \|f\|_2,$$

ce qui prouve que l'endomorphisme  $T$  de l'evn  $(E, \|\cdot\|_2)$  est continu  $\triangleright$  XI.37.

3) Soit  $f \in E$ . Comme vu à la question 2, la fonction  $T(f)$  est dérivable et, en dérivant (\*) :

$$\forall s \in [0, 1], (T(f))'(s) = -\int_0^s tf(t) dt + \int_s^1 (1 - t)f(t) dt$$

D'où la fonction  $(T(f))'$  est encore dérivable et

$$\forall s \in [0, 1], (T(f))''(s) = -f(s),$$

ce qui prouve aussi que la fonction  $T(f)$  est de classe  $C^2$ .

4) Soit  $f \in \text{Ker}(T)$ . Alors  $T(f) = 0$ , d'où  $f = -(T(f))'' = 0$  d'après la question précédente. Donc l'application  $T$  est injective.

5) Soit  $f \in E_\lambda$  : si  $\lambda = 0$ , alors  $f = 0$  par injectivité de  $T$ , donc (\*\*). Sinon  $T(f) = \lambda f$ , d'où  $T(f)(0) = \lambda f(0)$ . Or  $T(f)(0) = 0$  d'après (\*). D'où  $\lambda f(0) = 0$ . De plus,  $\lambda \neq 0$  car l'application linéaire  $T$  est injective d'après la question précédente, donc  $f(0) = 0$ . De même,  $T(f)(1) = 0$  d'après (\*), donc  $f(1) = 0$ . Enfin, d'après la question 3,

$$-f = (T(f))'' = \lambda f''.$$

6) De la question 4, il résulte que  $E_0 = \{0_E\}$ . Soit  $\lambda \neq 0$ .

ANALYSE : si  $f \in E_\lambda$ , alors

$$\lambda f'' + f = 0 \text{ et } f(0) = 0 \text{ et } f(1) = 0 \quad (**)$$

C'est une équation différentielle d'ordre 2 (car  $\lambda \neq 0$ ) linéaire sans second membre avec deux conditions aux bords, qu'on résout.

- Premier cas : si  $\lambda > 0$ , alors on pose  $\omega = 1/\sqrt{\lambda}$ . Il existe des constantes réelles  $a$  et  $b$  telles que  $\forall s, f(s) = a \cos(\omega s) + b \sin(\omega s)$ . De  $f(0) = 0$ , on tire que  $a = 0$  et de  $f(1) = 0$  que  $b \sin(\omega) = 0$ . Si  $b = 0$ , alors  $f = 0$ . Sinon  $\omega \equiv 0[\pi]$  et il existe donc  $k \in \mathbb{N}^*$  tel que  $\lambda = \frac{1}{k^2 \pi^2}$  et  $f \in \text{Vect}(s \mapsto \sin(k\pi s))$ .
- Second cas : si  $\lambda < 0$ , alors on pose  $\omega = 1/\sqrt{-\lambda}$ . Il existe des constantes  $a$  et  $b$  telles que  $\forall s, f(s) = a \text{ch}(\omega s) + b \text{sh}(\omega s)$ . De  $f(0) = 0$ , on tire que  $a = 0$  et de  $f(1) = 0$  que  $b = 0$ . Donc  $f = 0$ .

SYNTHÈSE : on vérifie que la fonction nulle appartient à  $E_\lambda$  pour tout réel  $\lambda$ . Et que, pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , la fonction  $f : s \mapsto \sin(k\pi s)$  est une solution de (\*\*). Montrons qu'elle appartient alors à  $E_{\frac{1}{k^2 \pi^2}}$  :  $f'' = -k^2 \pi^2 f$ , d'où  $f'' = (k^2 \pi^2 T(f))''$ , donc la fonction  $f - k^2 \pi^2 T(f)$  est affine et, de plus, elle est nulle en 0 et 1. C'est donc la fonction nulle, ce qui prouve que  $T(f) = \frac{1}{k^2 \pi^2} f$ .

Donc, s'il existe  $k \in \mathbb{N}^*$  tel que  $\lambda = \frac{1}{k^2 \pi^2}$ , alors  $E_{\frac{1}{k^2 \pi^2}} = \text{Vect}(s \mapsto \sin(k\pi s))$ . Sinon  $E_\lambda = \{0_E\}$ .