Révision - Thème 3

Merci à Alan Ricordel

Exercice 12

1. • $f = 0_{\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{C})} \in E$ car $\forall t,\ |t^3 f(t)| \leq 0$

• Soit $(\varphi,\psi) \in E^2$, $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2, \mathbb{C}^2$

$\lambda\varphi + \mu\psi \in E$ car $\lambda\varphi + \mu\psi \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{C})$

d'après les Th. généraux

et $\forall t \in \mathbb{R},\ |\lambda\varphi(t)t^3 + \mu\psi(t)t^3| \leq |\lambda|\,|\varphi(t)t^3| + |\mu|\,|\psi(t)t^3|$

d'après l'inégalité triangulaire

$\leq |\lambda|\,\Pi + |\mu|\,N \in \mathbb{R}$

car par hyp $\begin{cases} \forall t,\ |\varphi(t)t^3| \leq \Pi \\ \forall t,\ |\psi(t)t^3| \leq N \end{cases}$ $\exists (\Pi,N) \in \mathbb{R}^2$,

donc la fonction $t \mapsto t^3(\varphi(t)\lambda + \mu\psi(t))$ est bornée

donc $\boxed{\lambda\varphi + \mu\psi \in E}$

2. ~~L'intégrale~~ Soit $X =]-\infty, +\infty[$ et $T =]-\infty, +\infty[$,

$\forall x \in X,\ \forall t \in T,\quad f(x,t) = \varphi(t)\,e^{-i2\pi tx}$

* Soit $t \in T$, la fonction $x \mapsto \varphi(t)\,e^{-i2\pi tx}$ est $\mathcal{C}^1$ sur X car (1)

* Soit $x \in X$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est cpm et intégrable sur T car (2)

* Soit $x \in X$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est cpm sur T

* $\forall t \in T,\ \forall x \in X,$

$\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq 2\pi|t\varphi(t)|$ ~~$\sqrt{\dfrac{2\pi M}{t^2+1}}$~~ ~~car $\exists \Pi \in \mathbb{R}, \forall t, |\varphi(t)t^3| \leq \Pi$~~

et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\pi M}{t^2}\,dt$ est intég

et $t \mapsto 2\pi|t\varphi(t)|$ est cpm et intégrable car (3)

D'après le th. de dérivation sous le signe intégral

la fonction g est définie et C^1 sur $\mathbb{R}$.

et $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = -i2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} t\varphi(t) e^{-i2\pi tx} dt$

Notation

(1) la fonction $x \mapsto \frac{\partial f(x,t)}{\partial x} = -i2\pi t \varphi(t) e^{-2i\pi tx}$ est continue sur $\mathbb{X}$

(2) $\exists M \in \mathbb{R}, \forall t, |t^3 \varphi(t)| \leq M$

d'où $\forall t \neq 0, |f(x,t)| = |\varphi(t) e^{-2i\pi tx}| = |t^3 \varphi(t)| \frac{1}{|t|^3} |e^{-2i\pi tx}|$

$= |t^3 \varphi(t)| \times \frac{1}{|t|^3}$ car $|e^{-2i\pi tx}| = 1$

$\leq \frac{M}{|t|^3}$

Or les intégrales $\int_1^{+\infty} \frac{1}{|t|^3} dt$ et $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{|t|^3} dt$ convergent d'après le critère de Riemann en $+\infty$.

D'où les intégrales $\int_1^{+\infty} |f(x,t)| dt$ et $\int_{-\infty}^{-1} |f(x,t)| dt$ convergent.

Et l'intégrale $\int_{-1}^{1} |f(x,t)| dt$ n'est même pas impropre (car c'est l'intégrale d'une fonction continue sur un segment).

donc $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{T}$

Révision - Thème 3

Exercice 8

(3) $\forall x \in X, \forall t \in T$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) \right| = \left| -i2\pi t\, \varphi(t) e^{-i2\pi t x} \right|$$

$$= 2\pi |t\varphi(t)|$$

$$\leq \frac{2\pi M}{t^2} \quad \text{si } t \neq 0.$$

De même que précédemment, les intégrales $\int_1^{+\infty} |\partial_1 f(x,t)|\,dt$ et $\int_{-\infty}^{-1} |\partial_1 f(x,t)|\,dt$ convergent et l'intégrale $\int_{-1}^{+1} |\partial_1 f(x,t)|\,dt$ n'est pas impropre.

3. a) La fonction $\varphi : t \mapsto e^{-\pi t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et à valeur dans $\mathbb{C}$.

La fonction $f : t \mapsto t^3 e^{-\pi t^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall t \in \mathbb{R}$, $f'(t) = e^{-\pi t^2} t^2 (3 - 2\pi t^2)$

d'où

x	$-\infty$		$-\sqrt{3/2\pi}$		0		$\sqrt{3/2\pi}$		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	
f	0	↘	$-\left(\frac{3}{2\pi e}\right)^{3/2}$	↗	0	↗	$\left(\frac{3}{2\pi e}\right)^{3/2}$	↘	0

car $\lim_{t\to\infty} t^3 e^{-\pi t^2} = 0$ par croissances comparées

donc $\forall t \in \mathbb{R}, \quad |t^3 \varphi(t)| \leq \left(\frac{3}{2\pi e}\right)^{3/2}$

la fonction f est donc bornée sur $\mathbb{R}$ ♡

b) $g'(x) = -i2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} t\, e^{-\pi t^2} e^{-i2\pi tx}\, dt$

or $i\int_{-\infty}^{+\infty} -i2\pi t\, e^{-\pi t^2} e^{-i2\pi tx}\, dt = i\left[\int_0^{+\infty} -i2\pi t\, e^{-\pi t^2} e^{-i2\pi tx}\, dt + \int_{-\infty}^{0} -2\pi t\, e^{-\pi t^2} e^{-i2\pi tx}\, dt\right]$

Soit $N > 0$, oui

les fonctions $t \mapsto e^{-\pi t^2}$ et $t \mapsto e^{-i2\pi tx}$ sont C^1 sur $\mathbb{R}$

d'où par IPP : $\int_0^N -2\pi t\, e^{-\pi t^2} e^{-i2\pi tx}\, dt = \left[e^{-\pi t^2} e^{-i2\pi tx}\right]_0^N + i2\pi x \int_0^N e^{-\pi t^2} e^{-i2\pi tx}\, dt$

$\xrightarrow[N\to\infty]{} -1 + i2\pi x \int_0^{\infty} e^{-\pi t^2} e^{-i2\pi tx}\, dt$

Soit $N' < 0$,

de même $\int_{N'}^{0} -2\pi t\, e^{-\pi t^2} e^{-i2\pi tx}\, dt \xrightarrow[N'\to-\infty]{} 1 + i2\pi x \int_{-\infty}^{0} e^{-\pi t^2} e^{-i2\pi tx}\, dt$

d'où $\forall x, \quad g'(x) = i\left(i2\pi x \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t^2} e^{-i2\pi tx}\, dt\right)$

$$\boxed{\forall x, \quad g'(x) = -2\pi x\, g(x)}$$

♡ Autre méthode :

$\varphi(t) \xrightarrow[t\to\pm\infty]{} 0$, d'où : $\forall \varepsilon > 0, \exists a > 0, \forall t \in \mathbb{R}, \quad |t| > a \Rightarrow |\varphi(t)| < \varepsilon$.

On choisit $\varepsilon = 7$. Alors $\forall t \in]-\infty, -a[\cup]+a, +\infty[, \quad |\varphi(t)| < 7$.

Et, sur le segment $[-a, +a]$, la fonction φ est aussi bornée car elle est continue.

Thème 3

Exercice 8

3. c)

La fonction $\varphi : t \mapsto e^{-\pi t^2}$ vérifie l'équa diff $(*) \iff \forall x,\ g'(x) = -2\pi x g(x)$

car $\forall x,\ \varphi'(x) = -2\pi x e^{-\pi x^2}$

$= -2\pi x \varphi(x)$

Oui, ou non

(*) est une équa diff linéaire du 1er ordre à coefficient continu sans 2nd membre, d'où l'ensemble des sol. de (*) est un ev de dim 1 d'après le théo de Cauchy-Lipschitz. Donc

Pour tout $K \in \mathbb{R}$, $K\varphi$ est encore une solution de (*)

On fait varier la constante K :

Soit $\forall t \in \mathbb{R}$, on pose $g(t) = k(t) e^{-\pi t^2}$

Alors $\forall t \in \mathbb{R}$, $g'(t) = k'(t) e^{-\pi t^2} - k(t) 2\pi t e^{-\pi t^2}$

d'où $(*) \iff k'(t) e^{-\pi t^2} - k(t) 2\pi t e^{-\pi t^2} = -2\pi t k(t) e^{-\pi t^2}$

$\iff k'(t) e^{-\pi t^2} = 0$

$\iff k'(t) = 0$

$\iff (*) \iff \exists K \in \mathbb{R},\ \forall t \in \mathbb{R},\ g(t) = K e^{-\pi t^2}$ Donc Oui

or $g(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t^2} dt = \int_0^{+\infty} e^{-\pi t^2} dt + \int_{-\infty}^{0} e^{-\pi t^2} dt$ car l'intégrale cv

or $\int_0^{+\infty} e^{-\pi t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du$ en posant le CDV $t = \frac{u}{\sqrt{\pi}}$

C^1 et str. croissant

$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \times \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{1}{2}$ car $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

de même $\int_{-\infty}^{0} e^{-\pi t^2} dt = -\int_0^{0} e^{-\pi t^2} dt$ en posant le CDV $t = -u$

C^1 et str. décroissant

$= \int_0^{+\infty} e^{-\pi t^2} dt = \frac{1}{2}$

d'où $g(0) = 1$ or $g(0) = K$ donc $K = 1$

finalement $\boxed{\forall t,\ g(t) = e^{-\pi t^2} = \varphi(t)}$