Corrigé de la feuille de T.D. n° 15

Calcul différentiel

2 avril 2026

Exercice 1 (Dériver suivant un vecteur)**.** Soient E et F deux espaces vectoriels normés de dimensions finies. Soient un ouvert $U \subset E$, un point $a \in U$ et un vecteur $v \in E$. On dit qu'une fonction $f : U \to F$ est dérivable en le point a suivant le vecteur v si le vecteur

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t}$$

existe. On note alors ce vecteur $D_v f(a)$ et on l'appelle la dérivée de f en a suivant v.

1. Montrer que : si f est dérivable en a suivant tout vecteur v, alors f admet des dérivées partielles en a.
2. Soit $g(x,y) = \dfrac{x^2 \cdot y}{x^4 + y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $g(0,0) = 0$.
   (a) Montrer que la fonction g n'est pas continue en $(0,0)$.
   (b) Montrer que g est dérivable en $(0,0)$ suivant tout vecteur (x,y).
3. Montrer que : si f est différentiable en a, alors f est dérivable en a suivant tout vecteur v et
$$D_v f(a) = df(a) \cdot v.$$
   La réciproque est-elle vraie ?

---

1. La fonction f est dérivable en a suivant chaque vecteur de base e_i. D'où $\dfrac{f(a+te_i) - f(a)}{t} \underset{t \to 0}{\longrightarrow} D_{e_i} f(a)$. Donc $\partial_i f(a)$ existe et est égal à $D_{e_i} f(a)$.
2. (a) La fonction g n'est pas continue en $(0,0)$ car $(x, x^2) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} (0,0)$ mais $g(x, x^2) = \frac{1}{2}$ ne tend pas vers $g(0,0) = 0$.
   (b) Soient $a = (0,0)$ et $v = (x,y) \neq (0,0)$. Alors $\frac{g(a+tv)-g(a)}{t} = \frac{g(tx,ty)}{t} = \frac{t^2 x^2 y}{t^4 x^4 + t^2 y^2}$, d'où :
   — (premier cas) si $y \neq 0$, alors $\frac{g(tx,ty)}{t} = \frac{x^2 y}{t^2 x^4 + y^2} \underset{t \to 0}{\longrightarrow} \frac{x^2}{y}$;
   — (second cas) si $y = 0$, alors $\frac{g(tx,ty)}{t} = 0 \underset{t \to 0}{\longrightarrow} 0$.

   Donc g est dérivable en $(0,0)$ suivant tout vecteur et $D_{(x,y)} g(0,0)$ est égal à $\dfrac{x^2}{y}$ si $y \neq 0$ et est égal à 0 si $y = 0$.
3. Soit $v \in E$. Si f est différentiable en a, alors $f(a+tv) = f(a) + df(a) \cdot tv + \|tv\| \varepsilon(tv)$.

   D'où, pour tout $t \in \mathbb{R}^*$: $\dfrac{f(a+tv) - f(a)}{t} = df(a) \cdot v + \|v\| \varepsilon(tv) \underset{t \to 0}{\longrightarrow} df(a) \cdot v$. Donc f est dérivable en a suivant v et $D_v f(a) = df(a) \cdot v$.

   La réciproque est fausse : la question précédente exhibe un contre-exemple. En effet, elle est dérivable en $(0,0)$ suivant tout vecteur mais elle n'est pas continue en $(0,0)$, donc a fortiori pas différentiable en $(0,0)$.

Exercice 2. Soient E un espace vectoriel normé de dimension finie, U un ouvert de E, a un élément de U et deux fonctions

$$\lambda : E \to \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad f : E \to E.$$

différentiables en a. Montrer que la fonction

$$\lambda f : E \to E, x \mapsto \lambda(x) f(x)$$

est différentiable en a et que

$$d(\lambda f)(a) = f(a) d\lambda(a) + \lambda(a) df(a).$$

$$\begin{aligned}(\lambda f)(a+h) &= \lambda(a+h)f(a+h) = [\lambda(a) + d\lambda(a)\cdot h + \|h\|\varepsilon_1(h)]\,[f(a) + df(a)\cdot h + \|h\|\varepsilon_2(h)] \\ &= \lambda(a)f(a) + \underbrace{(d\lambda(a)\cdot h)f(a) + \lambda(a)df(a)\cdot h}_{L(h)} + \underbrace{(d\lambda(a)\cdot h)df(a)\cdot h + \|h\|\varepsilon_1(h)\,[f(a) + df(a)\cdot h + \|h\|\varepsilon_2(h)] + [\lambda(a) + d\lambda(a)\cdot h]\,\|h\|\varepsilon_2(h)}_{R(h)}\end{aligned}$$

Le reste $R(h)$ est un $o(\|h\|)$ car

$\frac{R(h)}{\|h\|} = (d\lambda(a)\cdot h)\,df(a)\cdot\frac{h}{\|h\|} + \varepsilon_1(h)\,[f(a) + df(a)\cdot h + \|h\|\varepsilon_2(h)] + [\lambda(a) + d\lambda(a)\cdot h]\,\varepsilon_2(h)$ tend vers 0 car :

— $d\lambda(a)\cdot h$ tend vers 0 (car l'application $d\lambda(a)$ est linéaire sur l'*ev* E qui est de dimension finie, donc continue) et $\left\|df(a)\cdot\frac{h}{\|h\|}\right\| \leq |||df_a|||$ (car l'application $df(a)$ est linéaire sur l'*ev* E qui est de dimension finie, donc continue) ;

— $\varepsilon_1(h)$ tend vers 0 et $[f(a) + df(a)\cdot h + \|h\|\varepsilon_2(h)$ tend vers $f(a)$;

— $\lambda(a) + d\lambda(a)\cdot h$ tend vers $\lambda(a)$ et $\varepsilon_2(h)$ tend vers 0.

Et l'application $L : h \mapsto (d\lambda_a\cdot h)f(a) + \lambda(a)df(a)\cdot h$ est linéaire, donc λf est différentiable en a et $d(\lambda f)(a) = f(a)d\lambda(a) + \lambda(a)df(a)$.

Exercice 3 (Le gradient en coordonnées cylindriques)**.** La fonction

$$f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ (r,\varphi,z) \mapsto (x,y,z) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)$$

change les coordonnées cylindriques (r,φ,z) en coordonnées cartésiennes (x,y,z).

1. Calculer la matrice jacobienne $J_f(r,\varphi,z)$.
2. Représenter sur un dessin les coordonnées cylindriques (r,φ,z) d'un point M et les trois vecteurs colonnes de la jacobienne.
3. Exprimer le gradient en coordonnées cylindriques.

Voir le corrigé manuscrit.

Exercice 4. Soit U et V les parties de $\mathbb{R}^2$ définies par

$$U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < y\} \quad \text{et} \quad V = \{(s,p) \in \mathbb{R}^2 \mid s^2 - 4p > 0\}.$$

1. Représenter sur deux figures les ensembles U et V.
2. Montrer que U et V sont des ouverts de l'espace vectoriel normé $\mathbb{R}^2$.
3. Montrer que : si $(x,y) \in U$, alors $(x+y, xy) \in V$.
4. Montrer que la fonction $f : U \to V,\ (x,y) \mapsto (x+y, xy)$ est bijective et calculer $f^{-1}(s,p)$ pour chaque $(s,p) \in V$.
5. En utilisant le changement de coordonnées f, déterminer toutes les fonctions g de classe $\mathcal{C}^1$ telles que :

$$\forall x < y, \quad \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y} = 3(y-x)g.$$

1. Voir la figure 1.
2. Soit la fonction $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto y - x$. L'ensemble U est égal à $u^{-1}(]0,+\infty[)$. C'est l'image réciproque d'un ouvert de $\mathbb{R}$ par une fonction continue. Donc c'est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

   Soit la fonction $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (s,p) \mapsto s^2 - 4p$. L'ensemble V est égal à $v^{-1}(]0,+\infty[)$. C'est l'image réciproque d'un ouvert de $\mathbb{R}$ par une fonction continue. Donc c'est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
3. Si $(x,y) \in U$, alors $x \neq y$, d'où $(x+y)^2 - 4xy = (x-y)^2 > 0$, donc $(x+y, xy) \in V$.

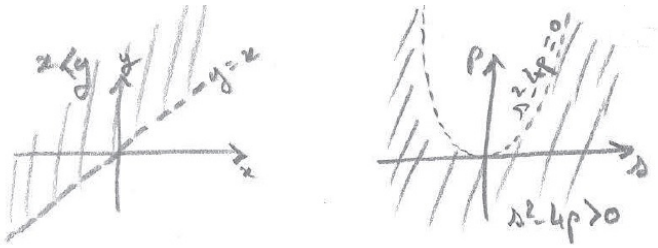


FIGURE 1 – LES PARTIES U ET V DU PLAN $\mathbb{R}^2$

4. Soient $(x,y) \in U$ et $(s,p) \in V$:

$$\begin{aligned}
(*)\ f(x,y) = (s,p) \quad &\iff \quad \begin{cases} x+y=s \\ xy=p \end{cases} \\
&\iff \quad x \text{ et } y \text{ sont les solutions de l'équation } X^2 - sX + p = 0 \\
&\iff \quad \{x;y\} = \left\{ \frac{s-\sqrt{s^2-4p}}{2}; \frac{s+\sqrt{s^2-4p}}{2} \right\} \quad \text{car } s^2-4p>0 \\
&\iff \quad (**)\ (x,y) = \left(\frac{s-\sqrt{s^2-4p}}{2}, \frac{s+\sqrt{s^2-4p}}{2} \right) \quad \text{car } x<y
\end{aligned}$$

L'équation $(*)$ a une unique solution, donc f est bijective.

D'après $(**)$, $f^{-1}(s,p) = \left(\frac{s-\sqrt{s^2-4p}}{2}; \frac{s+\sqrt{s^2-4p}}{2} \right)$.

5. Les dérivées partielles des fonctions $S : (x,y) \mapsto x+y$ et $P : (x,y) \mapsto xy$ sont

$$\frac{\partial S}{\partial x} : (x,y) \mapsto 1 \quad , \quad \frac{\partial S}{\partial y} : (x,y) \mapsto 1 \quad , \quad \frac{\partial P}{\partial x} : (x,y) \mapsto y \quad \text{et} \quad \frac{\partial P}{\partial y} : (x,y) \mapsto x$$

et sont continues sur U, d'où les fonctions S et P sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur U. La fonction $g = G \circ f$ vérifie $G(s,p) = g(x,y)$. Et $G = g \circ f^{-1}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ car g et f^{-1} le sont.

D'où (règle de la chaîne) :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial x} = \dfrac{\partial G}{\partial s}\dfrac{\partial S}{\partial x} + \dfrac{\partial G}{\partial p}\dfrac{\partial P}{\partial x} = \dfrac{\partial G}{\partial s} + y\dfrac{\partial G}{\partial p} \\ \dfrac{\partial g}{\partial y} = \dfrac{\partial G}{\partial s}\dfrac{\partial S}{\partial y} + \dfrac{\partial G}{\partial p}\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial G}{\partial s} + x\dfrac{\partial G}{\partial p} \end{cases} .$$

D'où

$$\begin{aligned}
\forall (x,y) \in U,\ \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y} = 3(y-x)g \quad &\iff \quad \frac{\partial G}{\partial p} = 3G \\
&\iff \quad \forall (s,p) \in V,\ G(s,p) = C(s) \cdot \mathrm{e}^{3p}, \text{ où } C \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \\
&\iff \quad \forall (x,y) \in U,\ g(x,y) = C(x+y) \cdot \mathrm{e}^{3xy}.
\end{aligned}$$

Exercice 5 (Différentielle de l'inversion)**.**

Soit $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices inversibles de l'espace vectoriel normé $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. (a) Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   (b) En se rappelant la comatrice, montrer que l'application $f : \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ M = (m_{ij}) \mapsto M^{-1}$ est de classe $\mathcal{C}^1$.
2. (a) Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. Montrer que :

$$(I_n + tE_{ij})^{-1} = I_n - tE_{ij} + o(t)$$

   et en déduire $df(I_n) \cdot E_{ij}$.

(b) Calculer $df(I_n)\cdot H$ pour tout $H\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et en déduire que

$$(I_n+H)^{-1}=I_n-H+o(H).$$

(c) Soit une matrice inversible A. Montrer que

$$(A+H)^{-1}=A^{-1}-A^{-1}HA^{-1}+o(H)$$

et en déduire $df(A)\cdot H$.

3. (a) Soit une application $g:\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\to\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ différentiable en A.

Montrer que l'application $G:\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\to\mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ M\mapsto M\cdot g(M)$ est aussi différentiable en A et calculer $dG(A)\cdot H$ pour tout $H\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(b) Retrouver ainsi l'expression de $df(A)\cdot H$.

---

1. (a) L'ensemble $GL_n(\mathbb{R})$ est l'image réciproque $\det^{-1}(\mathbb{R}^*)$ de l'ensemble $\mathbb{R}^*$ par la fonction $\det:\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$. Or la fonction det est continue et $\mathbb{R}^*$ est un ouvert de $\mathbb{R}$. Donc $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(b) L'inverse d'une matrice $M\in GL_n(\mathbb{R})$ s'écrit $\frac{1}{\det M}{}^tN$, où N est la comatrice de M. Chaque coefficient $(M^{-1})_{ij}$ de la matrice M^{-1} est donc une fraction rationnelle des coefficients M_{ij} de M car, au numérateur, $N_{ij}=(-1)^{i+j}\Delta_{ij}$ est un polynôme en les M_{ij} et, au dénominateur, $\det M$ est aussi un polynôme en les M_{ij}. Donc la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$.

2. (a) Si $i\neq j$, alors $(I_n+tE_{ij})^{-1}=I_n-tE_{ij}$.

Si $i=j$, alors $(I_n+tE_{ii})=\mathrm{diag}(1,\cdots,1,1+t,1,\cdots,1)$, d'où $(I_n+tE_{ii})^{-1}=\mathrm{diag}(1,\cdots,1,\frac{1}{1+t},1,\cdots,1)$. Or $\frac{1}{1+t}=1-t+o(t)$. Donc $(I_n+tE_{ii})^{-1}=I_n-tE_{ii}+o(t)$.

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$, d'où elle est différentiable, d'où

$$df(I_n)\cdot E_{ij}=\lim_{t\to0}\frac{f(I_n+tE_{ij})-f(I_n)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{-tE_{ij}+o(t)}{t}=-E_{ij}.$$

(b) Toute matrice H s'écrit $H=\sum_{i,j}h_{ij}E_{ij}$. Or l'application $df(I_n)$ est linéaire, d'où

$$df(I_n)\cdot H=\sum_{ij}h_{ij}df(I_n)\cdot E_{ij}=-\sum_{i,j}h_{ij}E_{ij}=-H,$$

donc $(I_n+H)^{-1}=f(I_n)+df(I_n)\cdot H+o(H)=I_n-H+o(H)$.

(c) $(A+H)^{-1}=\left[A\cdot(I_n+A^{-1}H)\right]^{-1}=(I_n+A^{-1}H)^{-1}\cdot A^{-1}$.

Or $(I_n+A^{-1}H)^{-1}=I_n-A^{-1}H+o(A^{-1}H)$ d'après la question précédente.

D'où $(A+H)^{-1}=A^{-1}-A^{-1}HA^{-1}+o(A^{-1}H)\cdot A^{-1}$.

Or un $o(A^{-1}H)\cdot A^{-1}$ est aussi un $o(H)$ (Pourquoi ?) D'où $(A+H)^{-1}=A^{-1}-A^{-1}HA^{-1}+o(H)$. Donc $df(A)\cdot H=-A^{-1}HA^{-1}$.

3. (a) $G(A+H)=(A+H)\cdot g(A+H)$ et $g(A+H)=g(A)+dg(A)\cdot H+o(H)$, d'où

$$G(A+H)=A\cdot g(A)+H\cdot g(A)+A\cdot dg(A)\cdot H+H\cdot dg(A)\cdot H+(A+H)\cdot o(H).$$

Or $H\cdot dg(A)\cdot H+(A+H)\cdot o(H)=o(H)$. (Pourquoi ?) Et l'application $H\mapsto H\cdot g(A)+A\cdot dg(A)\cdot H$ est linéaire. Donc G est différentiable en A et

$$dG(A)\cdot H=H\cdot g(A)+A\cdot dg(A)\cdot H.$$

(b) Si g est la fonction $f:A\mapsto A^{-1}$, alors G est la fonction constante $A\mapsto I_n$. D'où $dG(A)\cdot H=0$, d'où $H\cdot f(A)+A\cdot df(A)\cdot H=0$, donc $df(A)\cdot H=-A^{-1}HA^{-1}$.

Exercice 6. Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

1. On dit qu'une matrice $A=(a_{ij})$ de $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ est stochastique (▷ **TD nº 4 exo 8 & TD nº 6 exo 6**) si

$$\forall(i,j)\in[\![1,n]\!]^2,\ a_{ij}\geq0\quad\text{et}\quad\forall i\in[\![1,n]\!],\ \sum_{j=1}^{n}a_{ij}=1.$$

Montrer que l'ensemble des matrices stochastiques est une partie convexe, fermée et bornée de $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$.

2. ▷ **exo 7 de l'annexe C**. Montrer que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est une partie compacte (*i.e.* fermée et bornée) mais pas connexe par arcs de $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ est une partie compacte et connexe par arcs de $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$.

---

1. Montrons que l'ensemble des matrices stochastiques est convexe : soit $\lambda \in [0,1]$, soient A et B deux matrices stochastiques. La matrice $C = \lambda A + (1-\lambda)B$ est encore stochastique car :
   — pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $c_{ij} = \lambda a_{ij} + (1-\lambda)b_{ij}$ est positif car a_{ij} et b_{ij} le sont ;
   — pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, la somme $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} c_{ij}$ vaut 1 car elle est égale $\lambda + (1-\lambda)$.

   Pour chaque $i \in [\![1,n]\!]$, la fonction $f_i : \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R}) \mapsto \mathbb{R},\ A \mapsto \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$ est continue (car linéaire sur l'*ev* $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$, qui est de dimension finie). L'ensemble $F_i = f^{-1}(\{1\})$ est donc un fermé de $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ car c'est l'image réciproque du fermé $\{1\}$ de $\mathbb{R}$ par la fonction continue f.

   De même, pour chaque $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, la fonction $g_{ij} : \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R}) \mapsto \mathbb{R},\ A \mapsto a_{ij}$ est continue, d'où $G_{ij} = g_{ij}^{-1}([0,+\infty[)$ est fermé.

   Donc l'ensemble $\left(\cap_{i\in[\![1,n]\!]} F_i\right) \cap \left(\cap_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} G_{ij}\right)$ des matrices stochastiques est un fermé de $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ car c'est une intersection de fermés.

   Autre méthode (par la caractérisation séquentielle d'un fermé) — Soit une suite de matrices stochastiques A_k qui converge vers une matrice A :
   — pour chaque $i \in [\![1,n]\!]$, $\sum_{j=1}^{n} (A_k)_{ij} = 1$ et cette égalité passe à la limite, d'où $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$;
   — pour chaque $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $(A_k)_{ij} \geq 0$ et cette inégalité large passe à la limite, d'où $a_{ij} \geq 0$.

   D'où la matrice A est stochastique, donc l'ensemble des matrices stochastiques est un fermé de $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$.

   Pour montrer que l'ensemble des matrices $n \times n$ stochastiques est une partie bornée de $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$, on munit l'*ev* $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ de la norme $\|\cdot\| : A \mapsto \sum_{i,j} |a_{ij}|$ (ou de toute autre norme car toutes les normes sont équivalentes, cet *ev* étant de dimension finie). Pour toute matrice A stochastique, $\|A\| = \sum_{i=1}^{n} 1$ car $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$ et $|a_{ij}| = a_{ij}$ par hypothèses. D'où $\|A\| = n \leq n$ qui est un majorant.
2. Soit $M \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ une matrice : $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \iff M \cdot M^T = I_n \iff f(M) \in \{I_n\}$, en posant la fonction $f : \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R}),\ M \mapsto M \cdot M^T$. Donc $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = f^{-1}(\{I_n\})$ est un fermé car l'ensemble $\{I_n\}$ est un fermé et la fonction f est continue. En effet $f : M \mapsto (M, M^T) \to M \cdot M^T$ est la composée $g \circ h$ des applications $h : M \mapsto (M, M^T)$ et $g : (M,N) \mapsto M \cdot N$. La première est continue car linéaire sur l'ev $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ qui est de dimension finie ; la seconde est continue car bilinéaire sur l'ev $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ qui est de dimension finie.

   Munissons l'ev $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ du produit scalaire $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(A \cdot B^T)$ et donc de la norme $\|M\| = \sqrt{\mathrm{tr}(M \cdot M^T)}$. Pour toute matrice $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $M \cdot M^T = I_n$, d'où $\|M\| = \sqrt{n}$ qui est un majorant. Donc l'ensemble $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est borné.

   L'ensemble $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs car la fonction det y prend les valeurs -1 et $+1$ sans passer par les valeurs intermédiaires. Par contre, l'ensemble $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs car on a montré (▷ **exo 7 de l'annexe C**) que $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{e}^{\mathcal{A}_n(\mathbb{R})}$. Soit donc une matrice spéciale orthogonale : elle s'écrit e^A, où A est une matrice antisymétrique. Le chemin $M : t \mapsto M(t) = \mathrm{e}^{tA}$ connecte les matrices $M(0) = I_n$ et $M(1) = \mathrm{e}^A$, ce qui prouve que l'ensemble $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.

Exercice 7.

1. Déduire de la concavité de la fonction ln que :

$$\forall (a,b,c) \in]0,+\infty[^3,\ \sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3}.$$

2. On note f la fonction définie sur $]0,+\infty[^2$ par : $f(x,y) = x + y + \dfrac{1}{xy}$. Préciser, pour chaque extremum local de la fonction f, si c'est un maximum ou un mimimum et s'il est global.

Voir le corrigé manuscrit.

Exercice 8. Soient une matrice carrée $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ symétrique définie positive, une matrice colonne $b \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$ et un réel $c \in \mathbb{R}$. On note E l'evn $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$ et on définit la fonction

$$f \,:\, E \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^T A x - 2b^T x + c.$$

1. Montrer que f est différentiable sur E et que, pour tout $x \in E$:

$$\forall h \in E,\ df(x) \cdot h = 2(Ax - b)^T h.$$

2. Etudier les extrema de la fonction f.

---

1. Soit $h \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$:

$$\begin{array}{rcl} f(x+h) & = & (x+h)^T A(x+h) - 2b^T(x+h) + c \\ & = & f(x) + 2(Ax-b)^T h + h^T A h \text{ car } x^T A h = h^T A x \\ & = & f(x) + \ell(h) + q(h) \end{array}$$

   D'une part, l'application $\ell \,:\, h \mapsto 2(Ax-b)^T h$ est linéaire.

   D'autre part, $q(h) = h^T A h = o(h)$. En effet, $|q(h)| \leq \|h\| \cdot \|Ah\|$ d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz et $\|Ah\| \leq |\!|\!| A |\!|\!| \cdot \|h\|$. D'où $|h^T A h| \leq |\!|\!| A |\!|\!| \cdot \|h\|^2$.

   D'où la fonction f est différentiable en tout point $x \in E$ et sa différentielle en x est $df(x) \,:\, h \mapsto 2(Ax-b)^T h$.

2. Analyse : supposons que la fonction f possède un extremum local en $x_0 \in E$. La fonction f est différentiable en le point x_0 intérieur à E, donc x_0 est un point critique de f : or $\nabla f(x_0) = 2(Ax_0 - b)$. D'où $x_0 = A^{-1}b$ car la matrice A est inversible comme toute matrice symétrique définie positive (car $0 \notin \mathrm{Sp}(A)$ car $\mathrm{Sp}(A) \subset]0, +\infty[$).

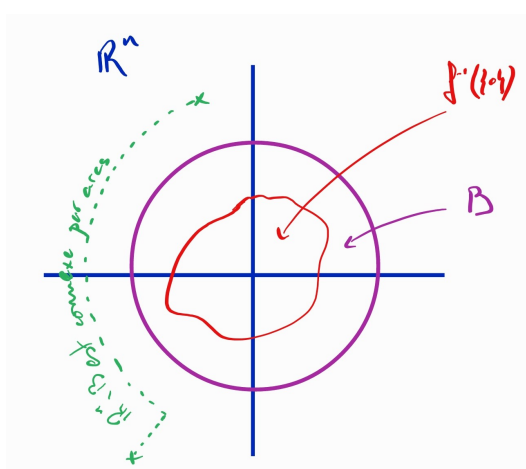
   Synthèse : pour tout h, $f(x_0 + h) = f(x_0) + h^T A h \geq f(x_0)$. En effet, $h^T A h$ est positif car la matrice A est symétrique positive.

   Donc f possède un unique extremum en $x_0 = A^{-1}b$. C'est un minimum et il est global.

Exercice 9. Soient un entier $n \geq 2$ et une fonction f continue de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}$ telle que $f^{-1}(\{0\})$ est un compact non vide. Montrer que f admet un extremum global. Que dire si $n = 1$?

L'ensemble $f^{-1}(\{0\})$ est compact, donc fermé borné, il est donc inclus dans une boule fermée B centrée en 0.

L'application $f|_B$ posséde un minimum global m et un maximum global M car elle est continue sur le compact B. De plus, f s'annule sur B, donc $m \leq 0$ et $M \geq 0$.



L'ensemble $A = \mathbb{R}^n \setminus B$ est connexe par arcs, la fonction f y est continue et ne s'y annule pas. Par le théorème des valeurs intermédiaires, elle n'y change donc pas de signe. Si $f|_A > 0$, alors m est le minimum global de f. Si $f|_A < 0$, alors M est le maximum global de f.

Si $n = 1$, la propriété est fausse car la fonction identité $\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x$ fournit un contre-exemple.

Exercice 10. Soient S la surface d'équation $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 1$ dans le repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

1. Montrer que la surface S est bornée.
2. Déterminer trois plans de symétrie de la surface S.
3. Montrer que, pour tout $(x, y, z) \in S$, $x + y + z \leq 1$. En déduire que la surface S est à l'intérieur d'un tétraèdre. Représenter graphiquement la surface S et ce tétraèdre.
4. Soit $A(a, b, c)$ un point de la surface S tel que ni a, ni b, ni c n'est nul. Quelle est l'équation du plan $P(a, b, c)$ tangent à la surface S au point A ?
5. On note x_0, y_0 et z_0 les trois réels tels que le plan $P(a, b, c)$ coupe l'axe des x en $x = x_0$, l'axe des y en $y = y_0$ et l'axe des z en $z = z_0$. Calculer $x_0 + y_0 + z_0$ et montrer que cette somme ne dépend pas de (a, b, c).

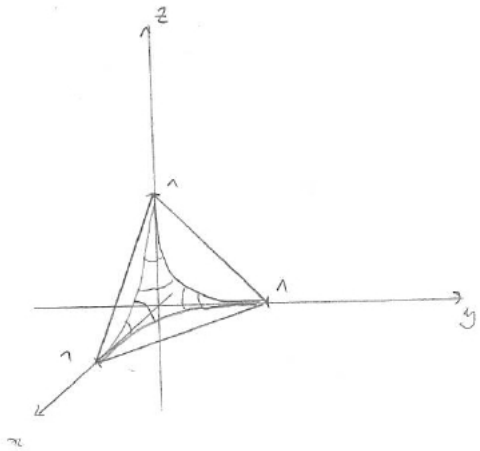


Figure 2 – Le tétraèdre, la surface S & ses courbes d'intersection avec les 3 plans de coordonnées

---

1. $\sqrt{x}$, $\sqrt{y}$ et $\sqrt{z}$ sont positifs et $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 1$ donc $\sqrt{x}$, $\sqrt{y}$ et $\sqrt{z}$ sont dans $[0, 1]$ donc x, y et z sont dans $[0, 1]$ donc la surface est bornée.
2. Les rôles de x, y sont les mêmes (on peut les échanger sans changer l'équation de S), d'où $(x, y, z) \in S \implies (y, x, z) \in S$ donc $x = y$ est l'équation d'un plan de symétrie de S. De même $x = z$ et $y = z$ sont les équations de deux autres plans de symétrie de S.
3. Si(x, y, z) est un point de S, alors $x \leq \sqrt{x}$, $y \leq \sqrt{y}$ et $z \leq \sqrt{z}$ donc $x + y + z \leq \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 1$. La surface S est incluse dans le tétraèdre de sommets $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ et $(0, 0, 1)$. Voir la figure 2.
4. L'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z) = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et la surface S est la surface de niveau 1 de f, donc le plan $P(a, b, c)$ tangent à S au point $A(a, b, c)$ est le plan passant par A et orthogonal au gradient de f en A. Or $\nabla f(a, b, c) = \left(\frac{1}{2\sqrt{a}}, \frac{1}{2\sqrt{b}}, \frac{1}{2\sqrt{c}}\right)$, d'où

   $$M(x, y, z) \in P(a, b, c) \iff \vec{AM} \perp \nabla f(A) \iff \frac{1}{2\sqrt{a}}(x-a) + \frac{1}{2\sqrt{b}}(y-b) + \frac{1}{2\sqrt{c}}(z-c) = 0 \iff \frac{1}{\sqrt{a}}x + \frac{1}{\sqrt{b}}y + \frac{1}{\sqrt{c}}z = 1.$$

5. Le plan $P(a, b, c)$ coupe l'axe des x en le point $(x_0, 0, 0)$ tel que $\frac{1}{\sqrt{a}}x_0 = 1$, c'est-à-dire $x_0 = \sqrt{a}$. De même, $y_0 = \sqrt{b}$ et $z_0 = \sqrt{c}$, d'où $x_0 + y_0 + z_0 = \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = 1$. Donc $x_0 + y_0 + z_0$ ne dépend pas de (a, b, c).