Merci à Adrien D.

Thème 4 - Corrigé de l'exercice 15

1) On note $(a_{i,j})_{i,j \in [\![1,n]\!]^2}$ les coefficients de A soit $i \in [\![1, n]\!]$.

On suit que $A^{(i)}$ est symétrique puisque A l'est.

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \end{pmatrix} \in M_{i,1}(\mathbb{R})$

$$X^T A^{(i)} X = X^T \begin{pmatrix} \sum_{\ell=1}^{i} a_{1,\ell} x_\ell \\ \vdots \\ \sum_{\ell=1}^{i} a_{i,\ell} x_\ell \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{\ell=1}^{i} x_\ell \left(\sum_{\ell=1}^{i} a_{\ell,\ell} x_\ell \right)$$

On

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}^T A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \sum_{\ell=1}^{i} a_{1,\ell} x_\ell \\ \vdots \\ \sum_{\ell=1}^{i} a_{m,\ell} a_\ell \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{\ell=1}^{i} x_\ell \left(\sum_{\ell=1}^{i} a_{\ell,\ell} x_\ell \right)$$

$$= X^T (A^{(i)} X)$$

$A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, d'où $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}^T A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} > 0$

D'où $\forall X \in M_{i,1}(\mathbb{R}),\ X^T A^{(i)} X > 0$

D'où $A^{(i)} \in S_i^{++}(\mathbb{R})$

La matrice $A^{(i)}$ est symétrique : ~~elle est donc diagonalisable dans une base~~ d'après le théorème spectral, soit $P \in O_i(\mathbb{R})$ tel que $P^T A^{(i)} P$ est diagonale.

Soit $(\lambda_1, \dots \lambda_i)$ les valeurs propres de $A^{(i)}$, qui sont réelles d'après le théorème spectral.

$$\det(P^T A^{(i)} P) = \prod_{\ell=1}^{i} \lambda_\ell$$

On $A^{(i)} \in S_i^{++}(\mathbb{R})$, donc $\forall \ell \in [\![1, i]\!], \lambda_\ell > 0$

car $\forall M \in S_i(\mathbb{R})$ $M \in S_i^{++}(\mathbb{R})$ ssi $\forall \lambda \in Sp(M), \lambda > 0$

Donc $\det(P^T A^{(i)} P) > 0$

Donc $\boxed{\forall i \in [\![1, n]\!], \det(A^{(i)}) > 0}$ car le déterminant est un invariant de similitude

2)

Pour $n = 1$, si A vérifie P_1, alors $\det(A^{(1)}) > 0$, or $\det(A^{(1)}) = \det(A) = (A)_{1,1}$

La matrice symétrique A est donc diagonale et son unique coefficient est strictement positif

D'après le théorème précédemment énoncé

$\boxed{A \in S_1^{++}(\mathbb{R})}$

Pour $n = 2$: Si A vérifie P_2, alors en posant $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$:

$$\begin{cases} \det(A^{(1)}) > 0 \\ \det(A) > 0 \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} a > 0 \\ ac - b^2 > 0 \end{cases}$$

donc $\begin{cases} a > 0 \\ ac > b^2 \geq 0 \end{cases}$

donc $\begin{cases} a > 0 \\ c > 0 \\ ac - b^2 > 0 \end{cases}$

D'où $\begin{cases} \operatorname{tr}(A) = a+c > 0 \\ \det(A) > 0 \end{cases}$

Soient λ_1 et λ_2 les valeurs propres, éventuellement égales, de A puisque la matrice A est diagonalisable d'après le théorème spectral.

$\begin{cases} \lambda_1+\lambda_2 > 0 \\ \lambda_1\lambda_2 > 0 \end{cases}$, car la trace et le déterminant sont des invariants de similitude

D'où

$\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$, car λ_1 et λ_2 sont { non nuls de même signe / de somme positive }

Là encore, sachant $\forall M \in S_2(\mathbb{R})$, $M \in S_2^{++}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \forall \lambda \in Sp(M), \lambda > 0$

> Si $A \in S_2(\mathbb{R})$ vérifie P_2, alors $A \in S_2^{++}(\mathbb{R})$.

Oui

3)

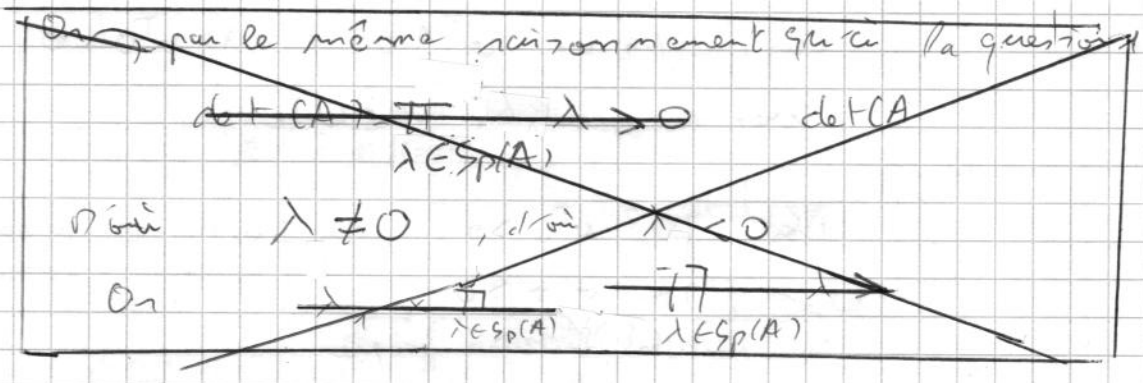
a) $\Leftarrow$

$A \in S_{n+1}(\mathbb{R})$ et il est non définie positive :

Soit donc $\lambda \in Sp(A)$ telle que $\lambda \leq 0$

A vérifie P_{n+1}, d'où $\det(A) > 0$

Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) \in Sp(A)^{n+1}$ les valeurs propres de A :



Par le même raisonnement qu'à la question 1

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n+1} \lambda_i > 0$$

Soit $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $\lambda_i = \lambda$:

D'où $\lambda_i \neq 0$ et $\exists j \in [\![1, n]\!] \setminus \{i\}, \lambda_j < 0$

Soient u et v 2 vecteurs propres associés aux valeurs propres λ_i et λ_j.

Si $\lambda_i \neq \lambda_j$, alors u et v sont linéairement indépendants car $v \perp u$

Proposition IV.16 — Les SEP sont en somme directe

Si $\lambda_i = \lambda_j$, alors $\dim(E_{\lambda_i}(f)) \geq 2$ et on peut donc choisir (u, v) orthogonale donc libre d'après l'algorithme de Gram-Schmidt.

linéairement

A admet donc 2 vecteurs propres u et v linéairement indépendants associés à des valeurs propres strictement négatives

6) Soit $(\mu_1 | \mu_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que la dernière composante de $X = (\mu_1 u + \mu_2 v)$ soit nulle.

D'après la question précédente $(\mu_1 u + \mu_2 v) \neq 0$

De plus

$$(\mu_1 u + \mu_2 v)^T A (\mu_1 u + \mu_2 v) = \mu_1^2 \lambda_i u^T u + \mu_2^2 \lambda_j v^T v$$

car $\mu_2 \mu_1 v^T A u = \mu_2 \mu_1 \lambda_i v^T u = 0$, car $u \perp v$ d'après la question précédente

Or : $\begin{cases} \mu_1^2 u^T u > 0 \\ \mu_2^2 v^T v > 0 \end{cases}$ car $\begin{cases} \mu_1 \neq 0 \\ \mu_2 \neq 0 \end{cases}$ et $\begin{cases} u \neq 0 \\ v \neq 0 \end{cases}$ car u et v sont des vecteurs propres

D'où $\mu_1^2 \lambda_i u^T u + \mu_2^2 \lambda_j v^T v < 0$

D'où $\boxed{\exists X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\} \; X^T A X < 0}$

$\boxed{\exists X' \in M_{n-1,1}(\mathbb{R}), \; X = \begin{pmatrix} X' \\ 0 \end{pmatrix}}$

D'où $X'^T A^{(m)} X' < 0$

On a A vérifie $P_{m+1} \Rightarrow A^{(m)}$ vérifie P_m

On a supposé que toute matrice de $S_m(\mathbb{R})$ qui vérifie P_m est définie positive d'où $A^{(m)} \in S_m^{++}(\mathbb{R})$

D'où $X'^T A^{(m)} X' > 0$: c'est absurde

$\left(\forall A \in S_m(\mathbb{R}),\ A \text{ vérifie } P_m \Leftrightarrow A \in S_m^{++}(\mathbb{R}) \right) \Rightarrow \left(\forall A \in S_{m+1}(\mathbb{R}),\ A \text{ vérifie } P_{m+1} \Leftrightarrow A \in S_{m+1}^{++}(\mathbb{R}) \right)$

Soit $m \in \mathbb{N}^*$, on note Q_m : $\forall A \in S_m(\mathbb{R})$, A vérifie $P_m \Leftrightarrow A \in S_m^{++}(\mathbb{R})$

D'après la question 2, Q_2 est vraie

D'après la question précédente et celle-ci

$\forall m \in \mathbb{N}^*$, $Q_m \Rightarrow Q_{m+1}$

Par principe de récurrence,

$$\boxed{\forall m \in \mathbb{N}^*,\ \forall A \in S_m(\mathbb{R}),\ A \text{ vérifie } P_m \Leftrightarrow A \in S_m^{++}(\mathbb{R})}$$

4)

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in S_2(\mathbb{R})$

$\begin{cases} \det(A) = 0 \\ \det(A^{(1)}) \neq 0 \end{cases}$ car la matrice A est triangulaire

On a A n'est pas positive

~~Donc~~ $\boxed{\text{L'équivalence est donc fausse}}$ ☆