Révisions - Thème 4 - Exercice 16

Merci à Noémie Rialland

le quotient de Rayleigh

$n \in \mathbb{N}^*$, $A \in S_n(\mathbb{R})$, $U = \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$

$$\forall X \in U, \quad f(X) = \frac{X^T A X}{X^T X} = \frac{\langle X, AX \rangle}{\|X\|^2}$$

1. Méthode 1 :

$A \in S_n(\mathbb{R})$ donc d'après le théorème spectral, il existe $(v_1, \dots, v_n)$ une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A

Soit $X \in U$, $\exists (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ tq $X = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$

$\|X\|^2 = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2$ et $\langle X, AX \rangle = X^T\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i v_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \lambda_i$

$= \sum \alpha_i v_i^T \times \sum \alpha_i \lambda_i v_i$

d'où $\dfrac{X^T A X}{X^T X} = \dfrac{\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \lambda_i}{\sum_{i=1}^n \alpha_i^2} \leqslant \dfrac{\lambda_{max} \sum \alpha_i^2}{\sum \alpha_i^2} \leqslant \lambda_{max}$

de même

Or $\exists i \in [\![1, n]\!]$ tq $\lambda_i = \lambda_{min}$ $(\lambda_i = \lambda_{max})$

alors $\alpha_j = \delta_{ij}$ i.e. $X = V_i$ $\Rightarrow \dfrac{X^T A X}{X^T X} = \lambda_{min}$

Donc f est bornée et atteint ses bornes

Méthode 2 :

$$\forall X \in U, \quad f(X) = \frac{X^T A X}{X^T X} = \frac{X^T A X}{\|X\|^2} = Y^T A Y \quad \text{où } Y = \frac{X}{\|X\|}$$

D'où $f(U) = f(S)$ où $S = \{X \in U, \|X\| = 1\}$ la sphère unité

Or la fonction f est continue car ♡

et S est un fermé borné de ~~E~~ U d'où $f(S)$ est un fermé borné de $\mathbb{R}$

♡ - c'est un quotient de fonctions continues : toute norme est continue et $X \mapsto (X, X)$ et $(X, Y) \mapsto X^T A Y$ sont C^0 donc $X \mapsto X^T A X$ aussi linéaire bilinéaire sur ev de dim finie
De plus $\|\cdot\|^2$ ne s'annule pas car $0 \notin U$

- Mtq $f(X+H) \xrightarrow[H \to 0]{} f(X)$

$$f(X+H) = \frac{(X+H)^T A (X+H)}{(X+H)^T(X+H)} = \frac{X^TAX + H^TAX + X^TAH + H^TAH}{X^TX + X^TH + H^TX + H^TH}$$

$H \mapsto H^TAX \quad H \mapsto X^TAH \quad H \mapsto H^TAH$ sont des fonctions linéaires donc continues

d'où $f(X+H) \xrightarrow[H \to 0]{} f(X)$

2. On veut montrer que

$f(X+H) = f(X) + l(H) + \underset{H\to 0}{o}(H)$ où l est une application linéaire

$$f(X+H) = \frac{X^TAX + H^TAX + X^TAH + H^TAH}{\|X\|^2\left(1 + \frac{H^TX + X^TH + H^TH}{\|X\|^2}\right)}$$

DL: $\frac{1}{1+u}$

$$\frac{1}{1 + \frac{H^TX + X^TH + H^TH}{\|X\|^2}} = 1 - \frac{H^TX + X^TH + H^TH}{\|X\|^2} + \dots$$

$$f(X+H) = f(X) + \frac{H^TAX + X^TAH}{\|X\|^2} - \frac{X^TAX(H^TX + X^TH)}{\|X\|^4} + \dots$$

$H^TAX = X^TAH$ car c'est un nombre donc sa transposée est lui-même

$$= f(X) + \frac{\|X\|^2 2X^TAH - (X^TAX)2X^TH}{\|X\|^4} + \dots$$

$$= f(X) + 2\frac{\|X\|^2\langle AX, H\rangle - \langle X, AX\rangle\langle X, H\rangle}{\|X\|^4} + \dots$$

Or d'ap le th. de représentation de Riesz

$l(H) = \langle \nabla f(X), H\rangle$

donc $\nabla f(X) = 2\frac{\|X\|^2 AX - \langle X, AX\rangle X}{\|X\|^4}$

Il faut enfin vérifier que $\dots = o(H)$. D'ap. l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $0 \leq |H^TAH| = |\langle H, AH\rangle| \leq \|H\| \times \|AH\| \leq \|H\| \times \underbrace{|||A||| \times \|H\|}_{H\to 0 \;\to 0} \leq o(H)$

Autre rédac :

$$0 \leq \frac{|H^TAH|}{\|H\|} \leq |||A||| \times \|H\| \xrightarrow[H\to 0]{} 0$$

il faudrait faire pareil pour le reste des ...

3. X est un point critique de f

ssi $\nabla f(X) = 0$ ssi $\|X\|^2 AX - \langle X, AX \rangle X = 0$

- Si X est un point critique de f alors

$AX = \underbrace{\frac{\langle X, AX \rangle}{\|X\|^2}}_{\in \mathbb{R}} X$ or $X \neq 0$ donc X est un $\vec{vp}$ de A

- Réciproquement, si $X \neq 0$ et que $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tq $AX = \lambda X$

alors $\|X\|^2 \lambda X - \langle X, \lambda X \rangle X = \|X\|^2 \lambda X - \lambda \|X\|^2 = 0$