Corrigé de la feuille de T.D. n° 16

Équations différentielles

4 avril 2026

Exercice 1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles

1. $x'' - 3x' + 2x = t\mathrm{e}^{2t}$ et $x'' - 2\sqrt{2}x' + 2x = 6$;
2. $(t^2+1)^2x'' + 2t(t^2+1)x' + x = 0$ en cherchant d'abord une solution de la forme $(1+t^2)^\alpha$.

---

1. (a) Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du second ordre avec second membre. On sait que sa solution générale est de la forme : $x = \psi + K\varphi_1 + L\varphi_2$, où $K\varphi_1 + L\varphi_2$ est la solution générale de l'équation homogène et ψ est une solution particulière de l'équation avec second membre.

   Commençons par résoudre l'équation homogène

   $$x'' - 3x' + 2x = 0. \quad (E_0)$$

   Cette équation différentielle est à coefficients constants ; son équation caractéristique est $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ et possède deux racines distinctes : 1 et 2. D'où la solution générale de (E_0) est : $\forall t \in \mathbb{R},\ x(t) = Ke^t + Le^{2t}$. Pour résoudre (E) on fait varier la constante L. On obtient alors l'équation :

   $$\ell''(t)e^{2t} + 4\ell'(t)e^{2t} - 3\ell'(t)e^{2t} = te^{2t} \iff \ell''(t) + \ell'(t) = t$$

   Une solution particulière de cette équation différentielle est $\ell : t \mapsto \ell(t) = \frac{t^2}{2} - t$.

   Première rédac (bof) — Donc la solution générale de l'équation (E) est :

   $$\forall t \in \mathbb{R},\ x(t) = (\frac{t^2}{2} - t)e^{2t} + Ke^t + Le^{2t},$$

   où $(K, L) \in \mathbb{R}^2$. Elle est bien de la forme : $x = \psi + K\varphi_1 + L\varphi_2$

   Deuxième rédac (mieux) — Donc x est une solution sur $\mathbb{R}$ de (E) si, et seulement si,

   $$\exists (K, L) \in \mathbb{R}^2,\ \forall t \in \mathbb{R},\ x(t) = (\frac{t^2}{2} - t)e^{2t} + Ke^t + Le^{2t}.$$

   (b) Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du second ordre avec second membre. On sait que sa solution générale est de la forme : $x = \psi + K\varphi_1 + L\varphi_2$, où $K\varphi_1 + L\varphi_2$ est la solution générale de l'équation homogène et ψ est une solution particulière de l'équation avec second membre.

   Commençons par résoudre l'équation homogène

   $$x'' - 2\sqrt{2}x' + 2x = 0. \quad (E_0)$$

   Cette équation différentielle est à coefficients constants ; son équation caractéristique est $\lambda^2 - 2\sqrt{2}\lambda + 2 = 0$ et possède une racine double égale à $\sqrt{2}$. D'où la solution générale de (E_0) est : $\forall t \in \mathbb{R},\ x(t) = (K + Lt)e^{t\sqrt{2}}$. Puis on remarque que $x : t \mapsto x(t) = 3$ est une solution particulière de (E).

   Première rédac (bof) — Donc la solution générale de (E) s'écrit : $\forall t \in \mathbb{R},\ x(t) = 3 + (K + Lt))e^{\sqrt{2}t}$, où $(K, L) \in \mathbb{R}^2$.

   Deuxième rédac (mieux) — Donc x est une solution sur $\mathbb{R}$ de (E) si, et seulement si,

   $$\exists (K, L) \in \mathbb{R}^2,\ \forall t \in \mathbb{R},\ 3 + (K + Lt))e^{\sqrt{2}t}.$$

2. Commençons par chercher une solution de la forme $x(t) = (1+t^2)^\alpha$. On obtient $x'(t) = 2\alpha t(1+t^2)^{\alpha-1}$ et $x''(t) = 2\alpha(1+t^2)^{\alpha-1} + 4\alpha(\alpha-1)t^2(1+t^2)^{\alpha-2}$. C'est une solution si, et seulement si,

   $$\begin{aligned}
   (t^2+1)^2(2\alpha(1+t^2)^{\alpha-1} + 4\alpha(\alpha-1)t^2(1+t^2)^{\alpha-2}) & \\
   +2t(t^2+1)(2\alpha t(1+t^2)^{\alpha-1}) + (1+t^2)^\alpha &= 0 \\
   2\alpha(1+t^2)^{\alpha+1} + (4t^2\alpha + 1 + 4\alpha(\alpha-1)t^2)(1+t^2)^\alpha &= 0 \\
   (2\alpha(1+2\alpha)t^2 + (2\alpha+1))(1+t^2)^\alpha &= 0 \\
   \alpha = -\tfrac{1}{2} &
   \end{aligned}$$

Donc $t \mapsto \frac{C}{\sqrt{1+t^2}}$ est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E). Et cette solution ne s'annule pas, on peut donc faire varier la constante : (E) est équivalent à

$$\begin{aligned} \frac{(t^2+1)^2}{\sqrt{t^2+1}}\left(C''(t) - \frac{2tC'(t)}{1+t^2}\right) + 2t(t^2+1)\frac{C'}{\sqrt{1+t^2}} &= 0 \\ \sqrt{t^2+1}(t^2+1)C''(t) &= 0 \\ C''(t) &= 0 \\ C(t) &= at+b. \end{aligned}$$

D'où la solution générale sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E) est $t \mapsto \frac{at+b}{\sqrt{1+t^2}}$.

Exercice 2 (séries entières)**.** On note F l'application

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto e^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}dt.$$

1. Montrer que la fonction F est une solution, sur $\mathbb{R}$, de l'équation différentielle
$$(E) \qquad y'(x) = -2xy(x) + 1.$$
2. En déduire la solution générale de l'équation différentielle (E).
3. Montrer que la fonction qui, à tout réel x, associe $\int_0^x e^{t^2}dt$ est développable en série entière sur $]-\infty,+\infty[$ et déterminer les coefficients de ce développement.
4. Montrer que F est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et déterminer une relation de récurrence vérifiée par les coefficients a_n de ce développement.
5. Pour tout entier naturel p, exprimer a_{2p} et a_{2p+1} en fonction de p.
6. En déduire, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, la somme
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}\binom{n}{k}.$$

---

1. La fonction F est un produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$:
   — la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ est dérivable car composée de fonctions dérivables et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\frac{d}{dx}e^{-x^2} = -2x \cdot e^{-x^2}$;
   — la fonction $x \mapsto \int_0^x e^{t^2}\,dt$ est une primitive de la fonction continue $t \mapsto e^{t^2}$ et $\frac{d}{dx}\int_0^x e^{t^2}\,dt = e^{x^2}$.
   D'où F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $F'(x) = -2xe^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}dt + e^{-x^2}e^{x^2} = -2xF(x) + 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. La fonction f est donc une solution de (E) sur $\mathbb{R}$.
2. La solution générale de l'équation sans second membre $y' = -2xy$ s'écrit : $\forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = K \cdot \mathrm{e}^{-x^2}$. Une solution particulière de l'équation avec second membre est F. Donc

   > y est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si, il existe un réel K tel que : $\forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = K \cdot \mathrm{e}^{-x^2} + e^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}\,dt$.

3. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^t = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}$. D'où : $\forall t \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^{t^2} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^{2k}}{k!}$. On peut intégrer terme à terme une série entière sans changer son rayon de convergence, donc
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \int_0^x e^{t^2}dt = \sum_{k=0}^{\infty}\int_0^x \frac{t^{2k}}{k!}dt = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{k!(2k+1)}.$$
4. La fonction F est développable en série entière sur $]-\infty,+\infty[$ d'après le théorème du produit de Cauchy car c'est le produit des deux fonctions développables en série entière sur $]-\infty,+\infty[$. Il existe donc une suite (a_n) telle que : $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$. La fonction F est une solution sur $\mathbb{R}$ de (E) d'après la première question, d'où :

$\forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} = -2x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + 1$ car on peut dériver terme terme une série entière sans changer son rayon de convergence. D'où : $\forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(n+1)x^n = -2\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^n + 1$.

Donc $\begin{cases} a_1 = 1 \\ \forall n \geq 1,\ (n+1)a_{n+1} = -2a_{n-1} \end{cases}$ par unicité du DSE.

5. $F(0) = 0$, d'où $a_0 = 0$ et, d'après la relation de récurrence, $a_{2p} = 0$ pour tout entier naturel p.

   D'après la relation de récurrence, pour tout entier naturel p,

$$a_{2p+1} = a_1 \times \frac{-2}{3} \times \frac{-2}{5} \times \cdots \times \frac{-2}{2p+1} = \frac{(-1)^p \cdot 4^p \cdot p!}{(2p+1)!}.$$

6. Soit $x \in \mathbb{R}$: $F(x) = e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2}\,dt$, d'où $\sum_{p=0}^{\infty} a_{2p+1}x^{2p+1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} \times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{k!(2k+1)}$. D'après le produit de Cauchy, $a_{2p+1} = \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!(2k+1)} \frac{(-1)^{p-k}}{(p-k)!}$. Donc

$$\sum_{k=0}^{p} \frac{(-1)^k}{2k+1}\binom{p}{k} = \frac{4^p}{(2p+1)\binom{2p}{p}}.$$

Exercice 3 (intégrales impropres & variation de la constante – oral CCP PC 2010)**.**

Soient l'équation différentielle $(E) : y' - y = e^{-x^2}$ et la fonction $u\colon x \mapsto \int_0^x e^{-t^2-t}\,dt$.

1. Montrer que u possède des limites finies quand x tend vers $\pm\infty$.
2. Exprimer les solutions de (E) en fonction de u.
3. Montrer que les solutions de (E) ont toutes pour limite zéro en $-\infty$.
4. Montrer qu'il existe une unique solution de (E) qui a pour limite zéro en $+\infty$.

---

1. Par croissances comparées, $t^2 e^{-t^2-t}$ tend vers zéro quand t tend vers $\pm\infty$. D'où $e^{-t^2-t} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ quand t tend vers $\pm\infty$. Et $\frac{1}{t^2}$ ne change pas de signe. Or les intégrales $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ et $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{t^2}\,dt$ convergent donc la fonction u possède des limites finies en $\pm\infty$.
2. Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions proportionnelles à l'exponentielle. La méthode de variation de la constante conduit à $k'(x)e^x = e^{-x^2}$, et on choisit $x \mapsto k(x) = u(x) = \int_0^x e^{-t^2-t}\,dt$ comme solution particulière. Finalement, la fonction y est une solution de (E) *SSI*

$$\exists K \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = e^x(K + u(x)).$$

3. Comme $K + u(x)$ admet une limite finie en $-\infty$, $y(x) = e^x(K + u(x))$ tend vers zéro quand x tend vers $-\infty$.
4. Analyse : Pour que $y(x)$ puisse tendre vers zéro quand x tend vers $+\infty$, il faut que $K = -\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)$.

   Synthèse : Dans ce cas

$$|y(x)| = \left|-e^x \int_x^{+\infty} e^{-t^2-t}\,dt\right| = e^x \int_x^{+\infty} e^{-t^2-t}\,dt \leqslant e^x \int_x^{+\infty} e^{-t^2-x}\,dt = \int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,dt.$$

   La fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ étant intégrable sur $\mathbb{R}$, l'intégrale ci-dessus tend vers zéro quand x tend vers $+\infty$. Il existe donc bien une, et une seule, solution de (E) de limite nulle en $+\infty$.

Exercice 4 (diagonalisation & variation des constantes)**.** Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ du système différentiel :

$$\begin{cases} x' = y + z + e^t \\ y' = -x + 2y + z \\ z' = x + z \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = y + z + e^t \\ y' = -x + 2y + z \\ z' = x + z \end{cases} \iff X' = AX + B(t), \quad \text{où } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Il s'agit d'un système linéaire de 3 équations différentielles avec second membre. On sait que la solution générale est de la forme $X = K\Phi_1 + L\Phi_2 + M\Phi_3 + \Psi$, où Ψ est une solution particulière de l'équation avec second membre et (Φ_1, Φ_2, Φ_3) est une base de l'ensemble des solutions de l'équation sans second membre.

On essaie de diagonaliser la matrice A pour découpler les équations. Le polynôme caractéristique de la matrice A est :

$$\begin{aligned} \det(\lambda I_3 - A) &= \begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ 1 & \lambda + 2 & -1 \\ -1 & 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 & -1 \\ \lambda - 2 & \lambda - 2 & -1 \\ \lambda - 2 & 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 2) \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & \lambda - 2 & -1 \\ 1 & 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 2) \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 2)(\lambda - 1)\lambda. \end{aligned}$$

D'où $\mathrm{Sp}(A) = \{0, 1, 2\}$. La matrice A est de taille 3×3 et possède 3 valeurs propres distinctes deux à deux, donc elle est diagonalisable.

Pour $\lambda = 0$:

$$AX = \lambda X \iff \begin{cases} y + z = 0 \\ -x + 2y + z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \iff X = zV_1 \quad \text{où } V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

D'où $SEP(0) = \mathrm{Vect}(V_1)$.

De même, $SEP(1) = \mathrm{Vect}(V_2)$ et $SEP(2) = \mathrm{Vect}(V_3)$, où $V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

La solution générale du système homogène s'écrit donc :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ X(t) = K \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + Le^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + Me^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On fait varier ces 3 constantes :

$$X' = AX + B(t) \iff \begin{cases} k' + m'e^{2t} = e^t \\ k' + \ell' e^t + m'e^{2t} = 0 \\ -k' - \ell' e^t + m'e^{2t} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k' = e^t \\ \ell' = -1 \\ m' = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} k(t) = e^t + K \\ \ell(t) = -t + L \\ m(t) = M \end{cases}$$

Donc X est une solution de $X' = AX + B(t)$ si, et seulement si, il existe $(K, L, M) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad X(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ (1-t)e^t \\ (t-1)e^t \end{pmatrix} + K \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + Le^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + Me^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5. Soient les équations différentielles

$$(E) \quad x^2y'' + 4xy' + 2y = \ln(1 + x) \qquad \text{et} \qquad (E_0) \quad x^2y'' + 4xy' + 2y = 0.$$

1. Déterminer les solutions de la forme $x \mapsto x^\alpha$ (où $\alpha \in \mathbb{R}$) de (E_0).
2. En déduire la solution générale sur $]0, +\infty[$ de (E_0).
3. Rappeler le développement en série entiére de $x \mapsto \ln(1 + x)$ ainsi que le rayon de convergence de cette série entiére.
4. (a) Rechercher le développement en série entiére d'une solution f de (E) et calculer le rayon de convergence R de cette série entière.

(b) Exprimer $f(x)$ pour tout $x \in]-R, 0[\cup]0, +R[$ à l'aide de fonctions usuelles.

5. Quelle est la solution générale de l'équation (E) sur l'intervalle $]0, 1[$?

---

1. La fonction $x \mapsto x^\alpha$ est une solution de l'équation $(E_0)\quad x^2y'' + 4xy' + 2y = 0$ si, et seulement si,
$x^2\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} + 4x\alpha x^{\alpha-1} + 2x^\alpha = 0 \iff \left(\alpha^2 + 3\alpha + 2\right)x^\alpha = 0 \iff \alpha \in \{-2; -1\}$.
2. L'ensemble des solutions sur l'intervalle $]0, +\infty[$ de l'équation (E_0) est un espace vectoriel de dimension 2 car (E_0) est une équation différentielle linéaire sans second membre d'ordre 2. Donc

$$\boxed{y \text{ est une solution }]0,+\infty[\text{ de } (E_0) \text{ } ssi \text{ } \exists (A,B) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in]0,+\infty[,\ y(x) = A \cdot \frac{1}{x^2} + B \cdot \frac{1}{x}.}$$

3. $\forall x \in]-1, +1[,\ \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}$ et le rayon de convergence est 1.

4. (a) Soit R le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ et $\forall x \in]-R, +R[,\ y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$:

$$\begin{aligned}
(E) \quad &\iff \quad x^2 \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2} + 4x \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} + 2\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} \\
&\iff \quad 2a_0 + 6a_1 + \sum_{k=2}^{\infty} (k^2+3k+2)a_k x^k = x + \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} \text{ (par unicité du DSE)} \\
&\iff \quad \begin{cases} a_0 = 0 \\ 6a_1 = 1 \\ \forall k \geq 2,\ (k+1)(k+2)a_k = (-1)^{k-1}\dfrac{1}{k} \end{cases} \\
&\iff \quad \begin{cases} a_0 = 0 \\ \forall k \geq 1,\ a_k = \dfrac{(-1)^{k-1}}{k(k+1)(k+2)} \end{cases} \\
&\iff \quad f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k(k+1)(k+2)} x^k.
\end{aligned}$$

Le rayon de convergence de cette série entière est $R = 1$ car $\dfrac{|a_{k+1}x^{k+1}|}{|a_k x^k|} = \dfrac{k(k+1)(k+2)}{(k+1)(k+2)(k+3)}|x| \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} |x|$.

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1} = \frac{1}{1-x}$. Intégrons : $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x) + \text{cte}$ et la constante d'intégration est nulle (tester avec $x = 0$). Intégrons une deuxième fois : $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{k(k+1)} = (1-x)\ln(1-x) + x + \text{cte}$ en intégrant par partie et la constante d'intégration est nulle (tester avec $x = 0$). Intégrons une troisième fois : $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k+2}}{k(k+1)(k+2)} = -\frac{(x-1)^2}{2}\ln(1-x) + \frac{(x-1)^2}{4} + \frac{x^2}{2} + \text{cte}$ en intégrant par partie et la constante d'intégration vaut $-\dfrac{1}{4}$ (tester avec $x = 0$). À chaque étape, on a intégré terme à terme sans changer le rayon de convergence, d'où

$$\forall x \in]-1, +1[,\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k+2}}{k(k+1)(k+2)} = -\frac{(x-1)^2}{2}\ln(1-x) + \frac{(x-1)^2}{4} + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{4}.$$

Divisons par x^2 et remplaçons x par $-x$:

$$\forall x \in]-1, 0[\cup]0, +1[,\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k(k+1)(k+2)} = \frac{-\dfrac{(x+1)^2}{2}\ln(1+x) + \dfrac{(x+1)^2}{4} + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{1}{4}}{x^2}.$$

Multiplions par -1 :

$$\forall x \in]-1, 0[\cup]0, +1[,\ f(x) = \frac{\dfrac{(x+1)^2}{2}\ln(1+x) - \dfrac{3}{4}x^2 - \dfrac{1}{2}x}{x^2}.$$

5. La solution générale y de l'équation (E) sur l'intervalle $]0,1[$ est égale à la solution générale y_0 de (E_0) plus une solution particulière f de (E). Donc

$$y \text{ est une solution }]0,+\infty[\text{ de } (E) \text{ ssi } \exists (A,B)\in\mathbb{R}^2,\ \forall x\in]0,+1[,\ y(x) = A\cdot\frac{1}{x^2} + B\cdot\frac{1}{x} + \frac{\frac{(x+1)^2}{2}\ln(1+x) - \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{2}x}{x^2}.$$

Exercice 6. Soient un intervalle I de $\mathbb{R}$, deux fonctions continues $a : I \to \mathbb{R}$ et $b : I \to \mathbb{R}$ et l'équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 2 sans second membre

$$x''(t) + a(t)x'(t) + b(t)x(t) = 0.$$

Soient $x_1 : I \to \mathbb{R}$ et $x_2 : I \to \mathbb{R}$ deux solutions sur I de cette équation. La fonction

$$W : I \to \mathbb{R},\ t \mapsto \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{vmatrix}$$

est appelée le **wronskien** de x_1 et x_2.

1. Montrer que W est dérivable et que, pour tout $t \in I$,
$$W'(t) = -a(t)W(t).$$
2. Montrer que : si les solutions x_1 et x_2 sont linéairement indépendantes, alors leur wronskien ne s'annule jamais.
3. Montrer que, si x_1 ne s'annule pas, alors
$$\forall t \in I, \left(\frac{x_2}{x_1}\right)'(t) = \frac{W(t)}{x_1^2(t)}.$$
4. Soient $x_1 : I \to \mathbb{R}$ et $x_2 : I \to \mathbb{R}$ deux solutions linéairement indépendantes. Montrer que x_1 et x_2 n'ont pas de racine commune. Et que, entre deux racines distinctes de x_2 (si elles existent), x_1 possède au moins une racine.
5. On suppose connue une solution $x_1 : I \to \mathbb{R}$ ne s'annulant pas. En utilisant le wronskien, déterminer une solution $x_2 : I \to \mathbb{R}$ linéairement indépendante de x_1.

---

1. La fonction W est dérivable car les fonctions x_1 et x_2 sont deux fois dérivables. Et $W' = (x_1x_2' - x_2x_1')' = x_1x_2'' - x_2x_1'' = x_1'(-ax_2' - bx_2) - x_2(-ax_1' - bx_1) = -aW$.
2. D'après le théorème de Cauchy & Lipschitz, si les vecteurs $(x_1(t), x_1'(t))$ et $(x_2(t), x_2'(t))$ sont liés à un instant t, alors ils le sont à tout instant. En contraposant : si les solutions x_1 et x_2 sont libres alors les vecteurs $(x_1(t), x_1'(t))$ sont libres à tout instant t, par suite $W(t)$ est non nul pour tout $t \in I$.

   Autre méthode — La fonction W est une solution sur I de l'équation différentielle $W'(t) = -a(t)W(t)$, qu'on résout : il existe une constante K telle que, pour tout $t \in I$, $W(t) = K\mathrm{e}^{-A(t)}$, où A est une primitive de a. Si les solutions x_1 et x_2 sont libres, alors il existe $t \in I$ tel que $W(t) \neq 0$. Par suite, la constante K n'est pas nulle. Et W ne s'annule donc jamais.
3. Pour tout $t \in I,\ x_1(t) \neq 0$, d'où $\left(\frac{x_2}{x_1}\right)'(t) = \frac{x_1(t)x_2'(t) - x_2(t)x_1'(t)}{x_1^2(t)} = \frac{W(t)}{x_1^2(t)}$.
4. Supposons que α est une racine de x_2 : $W(\alpha) = x_1(\alpha)x_2'(\alpha) - x_2(\alpha)x_1'(\alpha) \neq 0$, d'où $x_1(\alpha) \neq 0$ si $x_2(\alpha) = 0$.

   Supposons que α et $\beta > \alpha$ sont deux racines de x_2. Si x_1 ne s'annule pas sur $]\alpha,\beta[$, alors la fonction $\frac{x_2}{x_1}$ est définie sur $[\alpha,\beta]$, y est dérivable et s'annule en α et β.

   D'après le théorème de Rolle, $\exists\gamma \in]\alpha,\beta[,\ \left(\frac{x_2}{x_1}\right)'(\gamma) = 0$. C'est absurde car $\left(\frac{x_2}{x_1}\right)'(\gamma) = \frac{W(\gamma)}{x_1^2(\gamma)}$ d'après la question précédente. Donc x_1 s'annule au moins une fois sur $]\alpha,\beta[$.

5. Analyse : si $x_2 = yx_1$ est une solution de l'équation différentielle, alors, pour tout $t \in I$, $y'(t) = \frac{W(t)}{x_1^2(t)}$ d'après la question 3. Or la question (1) permet de calculer le wronskien : il existe une constante $K \in \mathbb{R}$ telle que, pour tout $t \in I$, $W(t) = K \cdot \mathrm{e}^{-A(t)}$, où A est primitive de la fonction a. Puis on détermine y en résolvant l'équation différentielle $y'(t) = \frac{W(t)}{x_1^2(t)}$.

   Synthèse : on choisit une valeur de K non nulle. La fonction x_2 est alors linéairement indépendante de x_1 car la fonction y n'est pas constante car sa dérivée ne s'annule pas car $W(t) = K \cdot \mathrm{e}^{-A(t)}$ ne s'annule pas. Et on vérifie en dérivant que x_2 est bien une solution de l'équation différentielle.