

Exercices d'oraux de mathématiques

Sélection d'énoncés rapportés d'oraux donnés aux concours et classés par thèmes

1 Algèbre

1.1 Sous-espaces vectoriels & applications linéaires

1. RMS 132 1126 CCINP PSI 2021

Soient E un espace vectoriel de dimension 4 et u un endomorphisme de E . Montrer que :

(a) si $\text{rg}(u) = 2$ et $u^2 = 0$, alors il existe une base dans laquelle u est représenté par
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

(b) si $\text{rg}(u) = 3$ et $u^4 = 0$, alors $\text{Ker}(u^2) = \text{Im}(u^2)$ et il existe une base dans laquelle u est représenté par
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. RMS 2012 275 X ESPCI PC, RMS 2013 305 X ESPCI PC, RMS 2013 869 Centrale PC

Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\Phi: M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto AMB$. Calculer la trace de Φ .

3. RMS 2007 768 Centrale PSI

Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E . On suppose que $E = F \oplus G$ et on note p le projecteur sur F parallèlement à G et $q = \text{id}_E - p$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que F est stable par f si et seulement si $q \circ f \circ p = 0$.

4. RMS 2016 969 CCP PC & RMS 2010 814 Centrale PSI

Soit $S: \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'application qui à f associe $S(f): x \mapsto \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} f(t) dt$.

- Montrer que, si $S(f) = 0$, alors f est périodique.
- L'application S est-elle injective? surjective?
- Soit $n \geq 2$. Montrer que S induit un endomorphisme sur $\mathbb{R}_n[X]$, noté s .
- L'endomorphisme s est-il bijectif? diagonalisable?

5. RMS 2006 1043 CCP PSI

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $f, g \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $\text{Im } f + \text{Ker } g = E \iff \text{Im}(g \circ f) = \text{Im } g$.

6. RMS 2014 639 Mines Ponts PSI

Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie et soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $f^2 = 0$ si, et seulement si, il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ g = f$ et $g \circ f = 0$.

7. RMS 2016 324 X ESPCI PC

Mots-clés : caractérisation des matrices non inversibles

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\det A = 0$ si et seulement s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle telle que $AB = BA = 0$.

8. RMS 2024 303 X MP MPI

Soient p un projecteur et u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie tels que $p \circ u + u \circ p = u$. Montrer que $\text{tr}(u) = 0$.

9. RMS 2024 930 Mines Ponts PSI

Soient un espace vectoriel E , un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ et un sous-espace vectoriel F stable par u . On suppose que u est nilpotent et que $E = F + \text{Im}(u)$. Montrer que $E = F$.

10. UPS 20240331

Mots-clés : commutant d'une matrice

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, \mathcal{M}_n l'espace vectoriel des matrices carrées à coefficients complexes et \mathcal{T}_n le sous-espace vectoriel des matrices triangulaires supérieures. Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n$, on pose f_A l'endomorphisme défini sur \mathcal{M}_n par $f_A(M) = AM - MA$.

- (a) On suppose que $A \in \mathcal{T}_n$. Montrer que, pour toute matrice $M \in \mathcal{T}_n$, la matrice $f_A(M)$ est triangulaire supérieure stricte. En déduire que $\dim(\mathcal{T}_n \cap \text{Ker } f_A) \geq n$.
- (b) Soit une matrice quelconque $A \in \mathcal{M}_n$. Montrer que $\dim(\text{Ker } f_A) \geq n$.

11. B2 Centrale

Mots-clés : commutant d'une matrice

Soient $n \geq 2$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

- (a) Soient $D = \text{diag}(1, 2, \dots, n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $M \mapsto MD - DM$. Montrer que $\text{Im}(\varphi)$ est l'ensemble \mathcal{N}_n des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ à coefficients diagonaux tous nuls.
- (b) Soit u un endomorphisme d'un \mathbb{K} -ev E de dimension n tel que, pour tout $x \in E$, $u(x)$ est colinéaire à x . Montrer que u est une homothétie.
- (c) Montrer que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont la trace est nulle est semblable à une matrice de \mathcal{N}_n .
- (d) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $\text{tr}(A) = 0$ si, et seulement si, il existe $(U, V) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ tel que $A = UV - VU$.

12. RMS 2025 535 Mines-Ponts MP-MPI

Soient $n \geq 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice non nulle et non inversible. Montrer que :

- (a) il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\text{Im}(A^p)$ et $\text{Ker}(A^p)$ sont supplémentaires ;
- (b) il existe $r \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $B \in GL_r(\mathbb{C})$ et $N \in \mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{C})$ nilpotente tels que A est semblable à $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix}$.

13. RMS 2026 983 Mines-Ponts PC

Soit $(A, B, C) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^3$. Montrer que :

- (a) $\text{rg}(AB) = \text{rg}(B) - \dim(\text{Ker}(A) \cap \text{Im}(B))$;
- (b) $\text{rg}(ABC) + \text{rg}(B) \geq \text{rg}(AB) + \text{rg}(BC)$.

14. RMS 2026 990 Mines-Ponts PC

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $\det(A) = \det(B) = \det(A+B) = \det(A-B) = 0$.

En étudiant la fonction $s \mapsto \det(A+sB)$, déterminer $\det(xA+yB)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

15. RMS 2026 274 X MP

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension $n \geq 2$.

Soient u et v dans $\mathcal{L}(E)$. On suppose que $c = u \circ v - v \circ u$ est de rang 1.

- (a) Montrer que $c^2 = 0$ et qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de c est égale à $E_{n-1, n}$.
- (b) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u^k(\text{Im } c) \subset \text{Ker } c$.

1.2 Réduction

16. RMS 132 1003 Centrale PSI 2021

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que toute matrice non nulle de F soit inversible.

- (a) Ici $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Montrer que, si les matrices A et B sont inversibles, alors il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $\alpha A - B$ n'est pas inversible. Qu'en déduire sur la dimension de F ?
- (b) Ici $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Examiner le cas où n est impair. Donner un exemple où la dimension de F est 2. Montrer que, si n est pair, alors $\dim F \leq n$.

17. RMS 2012 1319 CCP PC

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $f \circ f$ est un projecteur.

Montrer que f est diagonalisable si, et seulement si, $f^3 = f$.

18. RMS 2014 903b Centrale PSI

$$\text{Soit } M = \begin{pmatrix} i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix}.$$

- (a) Déterminer le polynôme minimal de la matrice M .
- (b) Montrer qu'il n'existe pas de matrice $B \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ semblable à M .

19. A1 CCP MP 2018

Soit une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $M^2 + M^T - I_n = 0$.

- (a) Montrer que la matrice M est diagonalisable.
 (b) Montrer que M est inversible si, et seulement si, 1 n'est pas une valeur propre de M .

20. RMS 2011 1128 CCP PC

- (a) On définit $\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ par : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \varphi(M) = 2M + {}^tM$. Déterminer un polynôme annulateur de φ . Montrer que l'endomorphisme φ est diagonalisable. Déterminer ses valeurs propres et ses sous-espaces propres.
 (b) Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $\varphi_{a,b} : M \mapsto aM + b{}^tM$. Montrer que $\varphi_{a,b}$ est inversible si, et seulement si, $a^2 \neq b^2$.

21. RMS 2016 757 Centrale PSI

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et f, g des endomorphismes de E tels que $f^2 = g^2 = \text{id}_E$ et $f \circ g + g \circ f = 0$.

- (a) Montrer que la dimension de E est paire.
 (b) Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle les matrices de f et g sont $\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -I_n \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$.

22. RMS 2016 472 Mines Ponts PSI

Mots-clés : racine carrée de la dérivation

On note E l'espace $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

- (a) Soient E_1 le sous-espace vectoriel engendré par les fonctions sinus et cosinus et $\phi_1 : f \in E_1 \mapsto f' \in E_1$. Montrer qu'il existe un endomorphisme u de E_1 tel que $u \circ u = \phi_1$.
 (b) Soit $\phi : f \in E \mapsto f' \in E$. Quel est le spectre de ϕ ? Existe-t-il un endomorphisme v de E tel que $v \circ v = \phi$?

23. RMS 2013 585 Mines Ponts PSI, RMS 2013 332 X ESPCI PC, RMS 2016 905 TPE PSI

Mots-clés : valeur propre commune

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et χ_A, χ_B leurs polynômes caractéristiques respectifs.

- (a) Montrer que : si A et B ont une valeur propre commune, alors il existe U et V non nuls dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tels que $AU = U$ et $BV = V$.
 (b) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que : si $AM = MB$, alors $\chi_B(A)M = 0$.
 (c) À quelle condition, nécessaire et suffisante, les matrices A et B ont-elles une valeur propre commune?

24. RMS 2014 1198 TPE PSI

- (a) Soient $d \in \mathbb{N}^*, a \in \mathbb{C}$ et $u : P \in \mathbb{C}_d[X] \mapsto (X - a)P' \in \mathbb{C}_d[X]$. Trouver les éléments propres de u .
 (b) En déduire l'ensemble des polynômes de $\mathbb{C}[X]$ divisibles par leur dérivée.

25. RMS 2007 934 CCP PC

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 + I_n$ ne soit pas inversible.

- (a) Montrer qu'il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $AX = iX$ et $X \neq 0$.
 (b) Montrer qu'il existe U et V dans $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ libres tels que $AU = -V$ et $AV = U$.

26. RMS 2010 1043 Petites Mines PC

Soient un entier $n \geq 2$, un réel m et la matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où $a_{i,j} = 1$ si $(i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, n-1\}$ et $a_{i,n} = m$ si $1 \leq i \leq n$.

- (a) On suppose que $m \neq 1 - n$. Montrer que A est diagonalisable.
 (b) On suppose que $m = 1 - n$. Montrer que la matrice A est semblable à la matrice $B = (b_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ dont tous les coefficients sont nuls excepté $b_{1,2} = 1$.

27. RMS 2016 904 CCEM PSI

Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit M une matrice carrée dont la première ligne est $(a, 0, \dots, 0)$ la deuxième $(1, \dots, 1)$, et toutes les autres $(1, 0, \dots, 0)$. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur a pour que M soit diagonalisable.

28. RMS 2014 1331 TPE PC

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\Phi_A : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto AM \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

- (a) Montrer que Φ_A est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Déterminer les $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tels que $\Phi_A = 0$.
 (b) Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $P \in \mathbb{C}[X]$, comparer $\Phi_{P(A)}$ et $P(\Phi_A)$.
 (c) Montrer que Φ_A est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable.

29. RMS 2013 970 TPE EIVP PSI

Discuter, dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, la diagonalisabilité et la trigonalisabilité en fonction du paramètre réel a de $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -a & a \end{pmatrix}$.

30. RMS 2011 1079 CCP PSI, RMS 2013 648 Mines Ponts PC, RMS 2014 1225 CCP PSI, RMS 2016 919 ENSEA PSI

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M \cdot M^T \cdot M = I_n$. Montrer que M est symétrique. Déterminer M .

31. RMS 2016 898 CCP PSI

Mots-clés : hyperplan stable

- (a) Soient H un hyperplan d'un \mathbb{C} -espace vectoriel E de dimension finie, et u un endomorphisme de E .
Montrer que $u(H) \subset H \iff \exists \lambda \in \mathbb{C}, \text{Im}(u - \lambda \text{id}) \subset H$.
- (b) Trouver tous les sous-espaces stables par l'endomorphisme u représenté dans une base B par

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

32. RMS 2015 686 Mines Ponts PC

Mots-clés : hyperplan stable

Soient $n \geq 2$, $\Phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ non nulle et $H = \text{Ker } \Phi$.

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Montrer que f stabilise H si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\Phi \circ f = \lambda \Phi$.

33. RMS 2024 65 ENS MP MPI

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $M = (m_{ij}) \in \mathcal{O}_{n+1}(\mathbb{R})$ la matrice d'une réflexion et $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. On pose $B = M \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$.

Montrer que $\chi_B(1) = \chi_A(0) \cdot \chi_A(1) \cdot (1 - m_{11})$.

1.3 Algèbre bilinéaire

34. RMS 2014 659 Mines Ponts PSI v2026

- (a) Étudier $\inf\{\mu \in \mathbb{R}_+ \mid \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), (\text{tr } A)^2 \leq \mu \text{tr}(A^T A)\}$.
- (b) En utilisant une inégalité arithmético-géométrique, étudier $\sup\{\mu \in \mathbb{R}_+ \mid \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mu \sqrt{\det(A^T A)} \leq \text{tr}(A^T A)\}$.

35. RMS 2014 913 Centrale PSI

- (a) Montrer que l'intégrale $\int_0^1 P(t) \ln(t) dt$ converge pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$.
- (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\int_0^1 P(t) \ln(t) dt = \int_0^\pi P(t) Q(t) \sin t dt$.

36. RMS 2006 CCP PC, RMS 2010 1055 Télécom Sud Paris PC

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension n , p un projecteur orthogonal de rang r et (e_1, \dots, e_n) une base orthonormale de E . Montrer que $\sum_{i=1}^n \|p(e_i)\|^2 = r$.

37. RMS 2011 1126 CCP PC

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien, H_1 et H_2 deux hyperplans distincts, e_1 et e_2 deux vecteurs unitaires respectivement orthogonaux à H_1 et H_2 . On pose

$$s_1 : x \mapsto x - 2\langle x, e_1 \rangle e_1 \quad \text{et} \quad s_2 : x \mapsto x - 2\langle x, e_2 \rangle e_2.$$

- (a) Vérifier que le plan $\text{Vect}(e_1, e_2)$ est stable par $s_2 \circ s_1$.
- (b) Montrer que $x \in E$ est fixe par $s_2 \circ s_1$ si et seulement si $x \in H_1 \cap H_2$.

38. RMS 2016 761 Centrale PSI

Soient p et q deux projections orthogonales définies sur un espace euclidien E . Soit $u = p + q$.

- (a) Soit x un vecteur de norme 1. Encadrer $\langle x \mid p(x) \rangle$ et $\langle x \mid q(x) \rangle$. En déduire que $\text{Sp}(u) \subset [0, 2]$.
- (b) Montrer que $\text{Ker}(u) = \text{Ker}(p) \cap \text{Ker}(q)$.
- (c) Déterminer $\text{Ker}(u - 2 \text{id})$.

39. RMS 2008 975 CCP PSI, RMS 2015 715 Mines Ponts PC, RMS 2015 1033, TPE PC, RMS 2016 558 Mines Ponts PC

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in O_n(\mathbb{R})$. Montrer que

$$\left| \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j} \right| \leq n = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j}^2 \leq \sum_{1 \leq i,j \leq n} |a_{i,j}| \leq n^{3/2}.$$

40. RMS 2009 1027 Centrale PC

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien.

- (a) Soit $g \in \mathcal{L}(E)$ autoadjoint tel que $\langle g(z), z \rangle = 0$ pour tout $z \in E$. Montrer que $g = 0$.
- (b) Soit $g \in \mathcal{L}(E)$ autoadjoint tel que $\langle g(z), z \rangle = \|g(z)\|^2$ pour tout $z \in E$. Montrer que g est un projecteur.

41. RMS 2013 986 CCP PSI, RMS 2015 992 CCP PSI, RMS 2016 918 CCEM PSI v2026

- (a) Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $(\text{tr } A)^2 \leq \text{rg } A \cdot \text{tr}(A^2)$.
- (b) Étudier $\inf\{\lambda \in \mathbb{R}_+ \mid \forall A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), |\det A| \leq \lambda \text{tr}({}^t A A)\}$.

42. OdT 2013 19 149 TPE PSI

Mots-clés : matrice symétrique semblable à sa diagonale

Soit S symétrique réelle et D diagonale dont les coefficients sont ceux de la diagonale de S . On suppose S et D semblables. Calculer $\text{tr}(S^2)$ de deux manières et en déduire que $S = D$.

43. RMS 2010 1028 TPE PSI

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Écrire la matrice dans la base canonique de la rotation d'angle π et d'axe dirigé par le vecteur (a, b, c) .

44. RMS 2014 180 ENS PC

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. On munit \mathbb{R}^n de sa structure euclidienne canonique et on note \mathcal{S} la sphère unité de \mathbb{R}^n . Montrer que l'application $\Phi: (t, X_0) \in \mathbb{R} \times \mathcal{S} \mapsto e^{tA} X_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ est bijective.

45. RMS 2024 314 X MP MPI

Soient p et q deux projecteurs orthogonaux dans un espace euclidien E . Montrer que :

- (a) l'endomorphisme $p \circ q \circ p$ est autoadjoint positif ;
- (b) $E = \text{Im } p + \text{Ker } q + (\text{Im } q \cap \text{Ker } p)$;
- (c) l'endomorphisme $p \circ q$ est diagonalisable ;
- (d) le spectre de $p \circ q$ est inclus dans $[0, 1]$.

46. RMS 2026 602 Mines Ponts MP MPI

- (a) Montrer que $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ est convexe.
- (b) Soient $U, V \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $R \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ tel que $U = R^2$ et en déduire $\text{tr}(UV) \geq 0$.
- (c) Soient $k \in \mathbb{N}$, I un intervalle ouvert de \mathbb{R} , $f: I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dérivable et $\alpha: t \mapsto \text{tr}(f(t)^k)$.
Montrer que : $\forall t \in I, \alpha'(t) = k \text{tr}(f'(t)f(t)^{k-1})$.
- (d) Soient $A, B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telles que $B - A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Montrer que : $\text{tr}(e^A) \leq \text{tr}(e^B)$. (On pourra utiliser la fonction $f: t \in [0, 1] \mapsto (1-t)A + tB = A + t(B-A)$.)

47. RMS 2026 448 X ESPCI PC, RMS 2016 885 ENSAM PSI

Soient $n \geq 2$ et les deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définies par

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} a_0 & a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 \\ a_1 & \ddots & \ddots & & a_2 \\ a_2 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix}.$$

- (a) La matrice J est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$? Quel est son spectre ?
- (b) La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$? Quel est son spectre ?
- (c) Montrer que $\Sigma = \{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n a_i = 0 \text{ et } \sum_{i=1}^n a_i^2 = 1\}$ est un compact de \mathbb{R}^n .
- (d) Montrer que la fonction $f: (a_1, \dots, a_n) \in \Sigma \mapsto a_1 a_2 + a_2 a_3 + \cdots + a_{n-1} a_n + a_n a_1$ possède un maximum, égal à $\cos \frac{2\pi}{n}$.
(On pourra commencer par déterminer le spectre de la matrice $\frac{1}{2}(J + J^T)$.)

1.4 Espaces vectoriels normés

48. RMS 2009 1031 Centrale PC

Mots-clés : continuité d'une application linéaire

Soit $E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$. Si $f \in E$, on pose $\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 f^2}$ et $\|f\|_\infty = \sup_{t \in [0, 1]} |f(t)|$. On fixe un réel α dans $[0, 1]$.

- (a) On pose $f_n : x \in [0, 1] \mapsto \frac{1}{\sqrt{1 + [n(x - \alpha)]^2}}$. Montrer que $\|f_n\|_2$ tend vers zéro.
- (b) L'application $\Phi : f \in E \mapsto f(\alpha) \in \mathbb{R}$ est-elle continue pour la norme $\|\cdot\|_2$?
- (c) Existe-t-il un réel $C > 0$ tel que $\forall f \in E, \|f\|_\infty \leq C\|f\|_2$?
- (d) Soit $n \in \mathbb{N}$. Existe-t-il $C > 0$ tel que $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \|P\|_\infty \leq C\|P\|_2$?

49. RMS 2024 102 ENS MP MPI

Soit f la fonction de \mathbb{R}_+^* vers \mathbb{R} nulle sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et définie par $f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{p+q}$ si $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ sont premiers entre eux. Quels sont les points de continuité de f ?

50. RMS 2025 635 Mines-Ponts MP-MPI

Soient E un espace vectoriel normé et f une forme linéaire continue non nulle. Soit $x_0 \in E$ tel que $f(x_0) \neq 0$.

- (a) Montrer que : $\|f\|_{op} = \frac{|f(x_0)|}{d(x_0, \text{Ker} f)}$.
- (b) Montrer que les deux propriétés (i) $\exists a \in E, \|f\|_{op} = \frac{|f(a)|}{\|a\|}$ et (ii) $\exists y \in \text{Ker} f, d(x_0, \text{Ker} f) = \|x_0 - y\|$ sont équivalentes.

51. UPS 20250506

Soit E le \mathbb{R} -espace vectoriel des fonctions bornées de \mathbb{R}_+ vers \mathbb{R} , muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Soit A , resp. B , l'ensemble des fonctions de E lipschitziennes, resp. uniformément continues.

- (a) Vérifier que $A \subset B$ mais que $B \not\subset A$.
- (b) Montrer que B est l'adhérence de A : $\bar{A} = B$. (On pourra considérer une fonction $f \in B$ et la suite des fonctions f_n définies par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+, f_n(x) = n \int_0^{1/n} f(t+x) dt$.)

52. RMS 2025 638 Mines-Ponts MP MPI

- (a) Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- (b) On suppose que $\|\cdot\|$ est une norme sur l'ev $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\|MN\| = \|NM\|$ si les matrices M et N sont semblables. Montrer que $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \|AB^2A\| = \|BA^2B\|$.
- (c) Existe-t-il une telle norme ?

53. RMS 2026 282 X MP

Soit $M \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ dont le rayon spectral est défini par $\rho(M) = \max\{|\lambda|, \lambda \in \text{Sp}(M)\}$.

- (a) Soient un vecteur $x \in \mathcal{M}_{d,1}(\mathbb{C})$ et une suite de matrices $A_n \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$. Montrer que : si la suite (A_n) converge, alors la suite $(A_n x)$ converge.
- (b) Montrer que : si $\rho(M) \geq 1$, alors la série $\sum M^n$ diverge.
- (c) Soient $\lambda \in \mathbb{C}, \alpha \in \llbracket 1, d \rrbracket$ et $N \in \mathcal{M}_\alpha(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente. Montrer que : $(\lambda I_\alpha + N)^n = O_{n \rightarrow \infty} (n^{\alpha-1} \lambda^n)$.
- (d) En déduire que : $M^n = O_{n \rightarrow \infty} (n^{d-1} \rho(M)^n)$.
- (e) Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Montrer que : si $\rho(M) < R$, alors la série $\sum a_n M^n$ converge.

1.5 Algèbre générale

54. RMS 2015 384 X ESPCI PC, RMS 2014 1165 CCP PSI

- (a) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé à racines simples.
- i. Calculer $\frac{P'(x)}{P(x)}$ pour tout x appartenant à \mathbb{R} privé des racines de P . En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}, P(x)P''(x) \leq P'(x)^2$.
- ii. Montrer que, si $\deg P \geq 2$, alors P' est aussi scindé à racines simples. En déduire que, si $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$, alors $a_k a_{k+2} \leq a_{k+1}^2$ pour tout $k \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket$.
- (b) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé. Le polynôme P' l'est-il aussi ?

55. RMS 2014 892 Centrale PSI

- (a) Soient un réel a et une fonction f continue sur $[a, +\infty[$ et dérivable sur $]a, +\infty[$. On suppose que f s'annule en a et tend vers 0 en $+\infty$: qu'en déduire ? (On pourra utiliser la fonction $x \mapsto f(a + \frac{1}{x} - 1)$ pour le prouver.)
- (b) Soient $P \in \mathbb{R}[X]$ et $Q = \sum_{k=0}^{+\infty} P^{(k)}$. Montrer que, si P n'a pas de racine réelle, alors Q non plus. (On pourra utiliser la fonction $x \mapsto Q(x)e^{-x}$.)

56. RMS 2013 288 X ESPCI PC

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(X^2 + 1) = P(X)^2 + 1$ et $P(0) = 0$. Soit la suite réelle $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $a_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = a_n^2 + 1$. Calculer $P(a_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Conclure.

57. RMS 2012 272 X ESPCI PC

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que : $\forall t \in \mathbb{R}, P_n(\sin^2 t) = \cos(2nt)$ et le déterminer.

58. RMS 2013 1048 TPE EIVP PC

Soient a, b dans \mathbb{C} , $n \in \mathbb{N}^*$ et $P = (X - a)^n (X - b)^n$.

Donner une expression de la dérivée n -ième de P et en déduire $\sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2$ en fonction de n .

59. RMS 2010 606 Mines Ponts PC

Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $(X + 4)P(X) = XP(X + 1)$.

60. RMS 2012 268 X ESPCI PC

Mots-clés : nombre de diviseurs d'un entier

- (a) Soit n un entier strictement positif dont la décomposition en facteurs premiers est $\prod_{j=1}^r p_j^{\alpha_j}$. Déterminer le nombre de diviseurs de n .
- (b) Quels sont les entiers $n \in \mathbb{N}^*$ ayant un nombre impair de diviseurs ?

61. RMS 2024 14 ENS MP MPI

Mots-clés : formule de Grassmann

Soit G un groupe fini. Si X et Y sont des parties non vides de G , alors on pose $X^{-1} = \{x^{-1}, x \in X\}$ et $XY = \{xy, (x, y) \in X \times Y\}$. Dans la suite, X désigne une partie non vide de G .

- (a) On suppose que $|XX| < 2|X|$. Soit $(a, b) \in X^2$. Montrer que $Xa \cap Xb \neq \emptyset$. En déduire que $XX^{-1} = X^{-1}X$.
- (b) On suppose que $|XX^{-1}| < \frac{3}{2}|X|$. Montrer que $X^{-1}X$ est un sous-groupe de G .

62. RMS 2024 424 X ESPCI PC

On veut montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $m \in \mathbb{N}^*$ et $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m) \in \{-1; +1\}^m$ tel que $n = \sum_{k=1}^m \varepsilon_k k^2$.

- (a) Prouver la propriété pour tout $n \in \{1; 2; 3\}$.
- (b) Développer les polynômes $(X + 3)^2 - (X + 1)^2$ et $(X + 4)^2 - (X + 2)^2$ et conclure.

63. RMS 2024 519 Mines Ponts MP MPI

Déterminer tous les couples $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ tels que $3^m = 8 + n^2$. (On pourra commencer par montrer que n est impair et que m est pair.)

64. RMS 2024 12 ENS MP MPI

Soient un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et une transposition (ab) telle que $1 \leq a < b \leq n$.

- (a) Soit un entier $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la transposition (12) et le cycle $c = (12 \cdots n)$ engendrent le groupe symétrique S_n .
- (b) Montrer que la transposition $\tau = (13)$ et le cycle $c = (1234)$ n'engendrent pas le groupe symétrique S_4 . (On pourra s'intéresser à la parité de $\tau(i) - i$ et de $c(i) - i$ pour tout $i \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$.)
- (c) Montrer que la transposition (ab) et le cycle $c = (12 \cdots n)$ engendrent S_n si, et seulement si, $b - a$ et n sont premiers entre eux.

65. B5 X

Mots-clés : sous-groupes finis de $GL_n(\mathbb{C})$

Soient E un \mathbb{C} -ev de dimension finie et G un sous-groupe fini de l'ensemble $GL(E)$ des automorphismes de E . Montrer que :

- (a) tout endomorphisme de G est diagonalisable et que ses valeurs propres sont des racines de l'unité.

- (b) $p = \frac{1}{\text{Card}(G)} \sum_{f \in G} f$ est un projecteur et en déduire que la trace moyenne $\frac{1}{\text{Card}G} \sum_{f \in G} \text{tr} f$ est égale à la dimension de l'ensemble $\{x \in E | \forall g \in G, g(x) = x\}$ des vecteurs invariants.

66. RMS 2025 1197 Centrale MP MPI

Mots-clés : sous-groupes finis de $GL_n(\mathbb{Z})$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à coefficients entiers et $GL_n(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices $M \in GL_n(\mathbb{R})$ telles que M et M^{-1} sont à coefficients entiers.

- (a) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Montrer que $A \in GL_n(\mathbb{Z})$ ssi $\det(A) = \pm 1$. (On pourra utiliser la comatrice.) Montrer que : $A^k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ ssi A est nilpotente.
- (b) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note $A = \frac{1}{3}(M - I_n)$. On suppose que $\exists k \in \mathbb{N}^*, M^k = I_n$ et que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Montrer que A est diagonalisable et que $M = I_n$.
- (c) Soient G un sous-groupe fini de $GL_n(\mathbb{Z})$. On note $\varphi : G \rightarrow GL_n(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ le morphisme qui, à $M = (m_{ij})$ associe $\varphi(M) = (\bar{m}_{ij})$ où \bar{m}_{ij} est la classe d'équivalence de m_{ij} modulo 3. Montrer que $\ker(\varphi) = \{I_n\}$.
- (d) Montrer que $|GL_n(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})| = (3^n - 1)(3^n - 3) \cdots (3^n - 3^{n-1})$. En déduire un majorant des cardinaux des sous-groupes finis de $GL_n(\mathbb{Z})$.

2 Analyse

2.1 Suites & séries numériques

67. RMS 2006 1124 CCP PC

Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série convergente à termes strictement positifs. Montrer que les séries $\sum_{n \geq 1} \frac{\sqrt{u_n}}{n}$ et $\sum_{n \geq 0} e^{-1/u_n}$ convergent.

68. RMS 2014 668 Mines Ponts PSI

Soit la suite définie par $a_0 > 0$ et $a_{n+1} = 1 - e^{-a_n}$.

- (a) Étudier la limite de cette suite.
- (b) Déterminer la nature de la série de terme général $(-1)^n a_n$.
- (c) Déterminer la nature de la série de terme général a_n^2 .
- (d) Étudier la série de terme général $\ln(\frac{a_{n+1}}{a_n})$. En déduire la nature de la série de terme général a_n .

69. RMS 2013 688 Mines Ponts PC

Soit $f \in C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ bornée et intégrable sur \mathbb{R}_+ . On pose $\alpha = \sup_{\mathbb{R}_+} f$.

- (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que f^n est intégrable. Soit $u_n = \int_0^{+\infty} f^n$.
- (b) Si $\alpha < 1$, montrer que la série de terme général u_n est convergente.
- (c) Si $\alpha > 1$, montrer que la série de terme général u_n est divergente.

70. RMS 2012 1327 CCP PC

Soit $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ 1-périodique et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \int_n^{n+1} \frac{f(t)}{t} dt$.

Montrer que la série de terme général u_n converge si, et seulement si, $\int_0^1 f(t) dt = 0$.

71. RMS 132 1163 CCP PSI 2021, RMS 130 1236 CCP PSI 2019

Soient deux suites réelles (a_n) positive et (u_n) définie par $u_0 \geq 0$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \sqrt{u_n^2 + a_n^2} \right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- (a) Comparer $u_{n+1} - u_n$ et $\frac{1}{2}a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- (b) Déterminer un équivalent de a_n dans le cas où $u_n = \frac{n}{n+1}$.
- (c) La convergence de la suite (u_n) implique-t-elle la convergence de la série $\sum a_n$? Et réciproquement?

72. RMS 2007 912 CCP PSI

Soient, pour tout réel $t \geq 1$, $f(t) = \frac{t}{t^2+t+1}$ et, pour tout entier $n \geq 1$, $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t) \sin t dt$.

Étudier le sens de variation de la fonction f , le sens de variation de la suite $(|u_n|)$ et la nature de la série $\sum u_n$.

73. RMS 2008 980 Télécom Sud Paris PSI, RMS 2013 657 Mines Ponts PC, RMS 2014 751 Mines Ponts PC

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{(-1)^n \cos(u_{n-1})}{n}$. Nature de la série de terme général u_n ?

74. RMS 2012 328 X ESPCI PC

Mots-clés : transformation d'Abel

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On suppose que (u_n) est décroissante et que la série de terme général u_n converge.

- (a) Montrer que $\sum_{k=0}^n u_k = (n+1)u_n + \sum_{k=1}^n k(u_{k-1} - u_k)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
- (b) Montrer que la suite de terme général $(n+1)u_n$ converge. En déduire que $nu_n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$.

75. RMS 2013 344 X ESPCI PC

- (a) Soient deux réels a et b tels que $b > a$. Étudier la limite de la suite des réels $(b + \sqrt[3]{n})^3 - (a + \sqrt[3]{n})^3$.
- (b) Montrer que l'ensemble $E = \{\sqrt[3]{m} - \sqrt[3]{n}, (m, n) \in \mathbb{N}^2\}$ est dense dans \mathbb{R} .

76. RMS 2024 722 Mines Ponts MP MPI

Soient (u_n) une suite décroissante de réels positifs et (v_n) la suite définie par $v_n = \frac{1}{1+n^2u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que : si la série $\sum u_n$ converge, alors la série $\sum v_n$ diverge.

77. UPS 20260508 Mines Ponts PSI 2025, ENS Lyon 2024

- (a) Montrer que $\int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{-x^2}}{2x}$.
- (b) Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_n + \int_{u_n}^{+\infty} e^{-t^2} dt$. Montrer que : $e^{u_{n+1}^2} - e^{u_n^2} \sim 1$.
- (c) En déduire un équivalent de u_n .

2.2 Intégrales

78. RMS 2014 1249 ENSAM PSI

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ et F sa primitive qui s'annule en 0.

- (a) Montrer que : si $\int_0^{+\infty} \frac{F(t)}{(1+t)^2} dt$ converge, alors $\int_x^{+\infty} \frac{F(t)}{(1+t)^2} dt \geq \frac{F(x)}{1+x}$ pour tout $x \geq 0$.
- (b) Montrer que les deux intégrales $\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{1+t} dt$ et $\int_0^{+\infty} \frac{F(t)}{(1+t)^2} dt$ sont de même nature et comparer leur valeur.

79. RMS 2013 376 X ESPCI PC, RMS 2014 761 Mines Ponts PC

Mots-clés : théorème de Cesàro pour les fonctions

- (a) Soit F une fonction continue sur \mathbb{R}_+ admettant une limite finie L en $+\infty$. Montrer que $\frac{1}{x} \int_0^x F(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} L$.
- (b) Soit f une fonction continue sur \mathbb{R}_+ telle que $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ est convergente. Montrer que $\frac{1}{x} \int_0^x t f(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

80. RMS 2011 1140 Télécom Sud Paris PC, RMS 2015 1003 CCP PSI

- (a) Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} [x]e^{-x} dx$ est convergente et qu'elle vaut $\frac{1}{e-1}$.
- (b) Existence et calcul de $\int_0^{+\infty} x e^{-[x]} dx$.

81. RMS 2014 781 Mines Ponts PC & RMS 2016 852 Centrale PC

Soit $F: x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t} dt$.

- (a) Montrer que la fonction F est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* .
- (b) Former une équation différentielle vérifiée par F et en déduire la limite de F en 0^+ .
- (c) Déterminer un équivalent de F en $+\infty$.

82. RMS 2013 917 Centrale PC

Soit $F: x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{te^{-t}}{t+x} dt$.

- (a) Montrer que F est définie et continue sur \mathbb{R}_+ , dérivable sur \mathbb{R}_+^* .
- (b) Calculer les intégrales $\int_0^{+\infty} te^{-t} dt$ et $\int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} dt$. Étudier la limite de $1 - xF(x)$ quand x tend vers $+\infty$. Conclure.

83. RMS 2016 795 Centrale PSI

Mots-clés : transformée de Laplace

On considère la fonction $F: x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-xt} \cdot \frac{\text{sh } t}{t} dt$.

- (a) Déterminer l'ensemble de définition de F .
- (b) Déterminer la limite de F en $+\infty$.

2.3 Suites & séries de fonctions

84. CCP PSI 2021

- (a) Prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale $J_n = \int_0^{+\infty} \frac{n^{1/3} \sin\left(\frac{t}{n^{1/3}}\right)}{1+t^3} dt$ est convergente.
- (b) Montrer que la suite des réels J_n converge vers le réel $K = \int_0^{+\infty} \frac{t}{1+t^3} dt$.
- (c) À l'aide d'un changement de variable, prouver que $K = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^3} dt$ et en déduire la valeur du réel K .

85. RMS 2013 1005 CCP PSI, RMS 2008 982 TPE PSI, RMS 2013 1005 CCP PSI, RMS 2015 748 Mines Ponts PC & RMS 2016 849 Centrale PC

Mots-clés : primitives itérées

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$, $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de fonctions définie par $f_0 = f$, et, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [a, b]$, $f_{n+1}(x) = \int_a^x f_n(t) dt$. Montrer que la série de fonctions de terme général f_n converge normalement sur $[a, b]$ et déterminer sa somme $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ en résolvant une équation différentielle.

86. RMS 2009 1050 Centrale PC

Quel est l'ensemble de définition de $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^n}$? Cette fonction est-elle continue ?

87. RMS 2016 937 CCP PSI

Montrer que $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2(1+x^{2n})}$ est défini pour tout réel x et que, pour tout $x \neq 0$, $S(x) = S(\frac{1}{x})$. Étudier la limite de S en $+\infty$.

88. RMS 2016 513 Mines Ponts PSI

Soit $S : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$.

- (a) Montrer que S est définie et de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* . Étudier le sens de variation de S .
- (b) Étudier les limites de S en 0 et en $+\infty$.
- (c) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $xS(x) - S(x+1) = \frac{1}{e}$.
- (d) Déterminer un équivalent de S en 0^+ et en $+\infty$.

89. RMS 2013 606 Mines Ponts PSI, RMS 2016 512 Mines Ponts PSI & RMS 2016 583 Mines Ponts PC

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{2x}{x^2+n^2}$. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ est définie sur \mathbb{R} . Étudier la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$. Montrer que la fonction f est continue mais que la série de fonctions $\sum f_n$ ne converge pas uniformément sur \mathbb{R} .

90. RMS 2016 371 X ESPCI PC

Soit, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{-n^2 x}$.

- (a) Montrer que la fonction $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est définie et continue sur $]0, +\infty[$.
- (b) Étudier la limite de f en $+\infty$.
- (c) Montrer que $\lim_{0^+} f = +\infty$. La série $\sum f_n$ converge-t-elle uniformément sur $]0, +\infty[$?

91. RMS 2016 938 CCP PSI & RMS 2015 666 Mines Ponts PSI

On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \ln(1 + e^{-nx})$.

- (a) Montrer que f est définie et continue sur $]0, +\infty[$.
- (b) Étudier la limite de f en $+\infty$.
- (c) Étudier la limite de f en 0^+ . (On pourra vérifier que $\forall t \in [0, 1]$, $\ln(1+t) \geq \frac{t}{2}$.)

92. RMS 2008 987 ENSAM PSI

Soient deux fonctions $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ et g continue et intégrable sur \mathbb{R}_+ . Montrer que :

$$n \int_0^1 f(t)g(nt) dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(0) \int_0^{+\infty} g(t) dt.$$

93. RMS 2015 1013 CCP PSI

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $U_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} dx$. Montrer que $U_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln 2}{n}$.

94. RMS 2010 849 Centrale PSI

- (a) Étudier la convergence de $\int_0^1 \frac{\ln x}{x^2-1} dx$.

(b) Montrer que $\int_0^1 \frac{\ln x}{x^2-1} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

95. RMS 2016 951 TPE PSI

Après avoir justifié l'existence de l'intégrale, montrer que $\int_0^{+\infty} e^{-x} \cos \sqrt{x} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{n!}{(2n)!}$.

96. RMS 2011 1150, CCP PC, RMS 2014 1262 Écoles des Mines PSI

Justifier l'existence de $I = \int_0^1 \frac{\ln t \ln(1-t)}{t} dt$. Montrer que $I = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$.

97. RMS 2025 993 Mines-Ponts MP-MPI

Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2^n x)}{2^n}$.

Montrer que la fonction f est définie et continue sur \mathbb{R} et qu'elle n'est pas dérivable en 0.

98. B4 Centrale

(a) Montrer qu'il existe une unique fonction $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ et $\forall x > 0, f(x) + f(x+1) = \frac{1}{x^2}$.

(b) Montrer que cette fonction f est continue sur $]0, +\infty[$ et intégrable sur $[1, +\infty[$. Calculer $\int_1^{+\infty} f(x) dx$.

2.4 Séries entières

99. RMS 2015 ENSAM PSI

Soit $(a_n) \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}^*}$ avec $a_1 \geq 1$. On pose $P_n : x \mapsto \sum_{k=1}^n a_k x^k$.

(a) Montrer qu'il existe un unique $x_n \in [0, 1]$ tel que $P_n(x_n) = 1$.

(b) Montrer que $P_{n+1}(x_n) \geq 1$. En déduire que la suite (x_n) est décroissante et qu'elle converge.

(c) On note $\ell = \lim x_n$ et on suppose que $\ell > 0$. Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ est supérieur à ℓ .

100. RMS 2013 1017 CCP PSI

(a) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$ et calculer $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$ pour tout $x \in]-R, +R[$.

(b) Montrer que, pour $x \in]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$, $\tan(2x) = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$.

(c) Montrer que $\pi = 8 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} (\sqrt{2} - 1)^{2n+1}$.

(d) Majorer l'erreur commise en approchant π par la somme partielle d'ordre N de la série précédente.

101. RMS 2009 989 Centrale PSI

Soit (a_n) une suite de réels. On note R le rayon de convergence de la série de terme général $a_n x^n$ et R' celui de la série de terme général $\sin(a_n) x^n$.

Montrer que $R' \geq R$ et qu'il y a égalité si $R > 1$.

102. RMS 2015 749 Mines Ponts PC

Soit (a_n) une suite complexe. On suppose que $\sum a_n z^n$ a un rayon de convergence $R > 0$, que $\sum a_{2n} z^n$ a un rayon de convergence $R_1 > 0$ et que $\sum a_{2n+1} z^n$ a un rayon de convergence $R_2 > 0$. Exprimer R en fonction de R_1 et R_2 .

103. RMS 132-709 Mines-Ponts PSI 2021

On considère une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence R strictement positif.

(a) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{a_n}{n!} z^n$.

(b) On pose $b_n = \frac{a_n}{1+|a_n|}$. Montrer que la série entière $\sum b_n z^n$ a un rayon de convergence R' supérieur ou égal à 1. Puis prouver que $R' = \max(1, R)$.

104. RMS 2013 379 X ESPCI PC

Soient $a_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \prod_{k=1}^n \left(\frac{2k-1}{2k}\right)$.

(a) Montrer que le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$ vaut 1.

(b) Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ pour tout $x \in]-1, +1[$. Trouver une équation différentielle vérifiée par f sur $] -1, +1[$.

(c) Calculer $f(x)$ pour tout $x \in]-1, +1[$.

105. RMS 2011 1145 CCP PC, RMS 2012 1333 CCP PC, RMS 2013 1062 CCP PC & RMS 2016 782 Centrale PSI

Mots-clés : nombre de dérangements

Soit $(d_n)_{n \geq 0}$ définie par $d_0 = 1$, $d_1 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $d_{n+2} = (n+1)(d_{n+1} + d_n)$.

- (a) Calculer d_2 et d_3 . Montrer que $\forall n \geq 2, \frac{n!}{3} \leq d_n \leq n!$ et en déduire le rayon de convergence R de la série entière de terme général $\frac{d_n}{n!}x^n$.
- (b) Pour tout $x \in]-R, R[$, on pose $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{n!}x^n$. Montrer que $\forall x \in]-R, R[$, $(1-x)S'(x) = xS(x)$.
- (c) En déduire une expression de $S(x)$ en fonction de x et exprimer d_n comme une somme en fonction de n .

106. RMS 2016 939 ENSEA PSI, RMS 2016 941 CCP PSI

Soit (a_n) dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $a_1 \geq a_0 > 0$ et $\forall n \geq 2, a_n = a_{n-1} + \frac{2}{n}a_{n-2}$.

- (a) Montrer que la suite (a_n) est croissante et que la suite $(\frac{a_n}{n^2})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante. En déduire le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$
- (b) Former une équation différentielle vérifiée par la somme et calculer cette somme dans le cas où $a_0 = a_1 = 1$.

107. RMS 2016 593 Mines Ponts PC, RMS 2013 607 Mines Ponts PSI, RMS 2014 770 Mines Ponts PC

Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. Soient $f: x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} H_n x^n$ et $g: x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} (\ln n)x^n$.

- (a) Montrer que la suite $(H_n - \ln n)$ est convergente.
- (b) Montrer que les fonctions f et g sont définies sur $] -1, +1[$.
- (c) Montrer que, pour tout $x \in] -1, +1[$, $f(x) = -\frac{\ln(1-x)}{1-x}$.
- (d) Montrer que $f(x) \sim g(x)$ ($x \rightarrow 1^-$).

108. RMS 2013 670 Mines Ponts PC, RMS 2006 1132 CCP PC, RMS 2011 1144 CCP PC, RMS 2013 1019 CCP PSI

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \int_0^1 (\frac{1+t^2}{2})^n dt$.

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \geq \frac{1}{n+1}$ et étudier la limite de la suite (a_n) .

Quel est l'ensemble de définition de la fonction $f: x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$?

109. UPS 20260409 Centrale PC 2025

Soit $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n} e^{inx}$. Montrer que :

- (a) la fonction S est définie et de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} ;
- (b) $U_k = \sum_{n=0}^{\infty} n^k e^{-n}$ est un $O(k!)$ quand k tend vers ∞ ;
- (c) la fonction S est développable en série entière sur un intervalle à préciser.

2.5 Équations différentielles & calcul différentiel

110. RMS 2014 1308 CCP PSI

Soit $(S) \begin{cases} x'(t) = y(t) - z(t) \\ y'(t) = z(t) - x(t) \\ z'(t) = x(t) - y(t), \end{cases}$ avec $x(0) = 1, y(0) = z(0) = 0$.

- (a) Montrer que la trajectoire de toute solution est incluse dans une sphère et dans un plan.
- (b) Résoudre directement (S) .

111. RMS 2010 1026 CCP PSI

Mots-clés : raccordement de solutions, théorème de la limite de la dérivée

Soit $(E) : (1+x)y' - 2y = 0$.

- (a) Déterminer les solutions sur \mathbb{R} de (E) . Donner une base de l'ensemble des solutions.
- (b) Donner une base de l'ensemble des solutions de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}

112. RMS 2013 921 Centrale PC

Déterminer les fonctions $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) + f(-x) = e^x$.

113. RMS 2016 525 Mines Ponts PSI

L'application $H: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $H(x, y) = \frac{x^4 y}{x^4 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$, et $H(0, 0) = 0$, est-elle continue? de classe \mathcal{C}^1 ?

114. RMS 2009 998 Centrale PSI

Trouver les extrema de $(x, y) \mapsto \sin(x) \sin(y) \sin(x+y)$ sur $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi, 0 \leq x+y \leq \pi\}$.

115. RMS 2016 612 Mines Ponts PC

Déterminer les solutions f de classe \mathcal{C}^1 sur $U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ de l'équation $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{x}$.

116. RMS 2013 396 X ESPCI PC

On munit \mathbb{R}^n de sa structure euclidienne canonique. Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable dont toutes les dérivées partielles sont bornées entre -1 et 1. Montrer que $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$, $|f(x) - f(y)| \leq \sqrt{n} \|x - y\|$. (On pourra utiliser la fonction $\varphi : t \mapsto f(tx + (1-t)y)$.)

117. RMS 2012 357 X ESPCI PC

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ différentiable telle que $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$, $\|f(x) - f(y)\| \geq \|x - y\|$. Montrer que f est injective. Et que, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $df(x_0)$ est bijective.

118. RMS 2009 1062 Centrale PC

Soit f une fonction de \mathbb{R}^2 vers \mathbb{R} différentiable. On suppose que $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^2)^2$, $|f(x) - f(y)| \leq \|x - y\|^2$. Montrer que f est constante.

119. RMS 2024 876 Mines Ponts MP MPI

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ différentiable telle que $\|f(x)\| \xrightarrow{\|x\| \rightarrow +\infty} +\infty$ et que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $df(x)$ est surjective. Soient $a \in \mathbb{R}^n$ et $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \|f(x) - a\|^2$.

- Montrer que la fonction g est différentiable et exprimer $dg(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.
- Montrer que la fonction g admet un minimum global.
- En déduire que la fonction f est surjective.

120. B1 Centrale

Mots-clés : extrema liés

Soient $n \geq 2$, la fonction $g :]0, +\infty[^n \rightarrow \mathbb{R}$, $(x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^n \ln(x_i)$ et l'ensemble $C = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in]0, +\infty[^n \mid \sum_{i=1}^n x_i = 1 \right\}$.

- Montrer que : $\forall x \in C$, $g(x) \leq \frac{1}{n} \ln(n)$.
- Étudier les extrema locaux de la fonction $g|_C$, restriction de g à C .

121. C1 Mines Ponts

Mots-clés : groupe symplectique, espace tangent

Soient un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et la matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ définie par blocs.

- On note Sp_{2n} l'ensemble des matrices symplectiques, défini par : $Sp_{2n} = \{M \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R}) \mid M^T J M = J\}$. Montrer que Sp_{2n} est un sous-groupe de $GL_{2n}(\mathbb{R})$.
- On note H_{2n} l'ensemble des matrices hamiltoniennes, défini par : $H_{2n} = \{A \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R}) \mid A^T J + J A = 0\}$. Montrer que H_{2n} est un *sev* de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$. Quelle est sa dimension ? (On pourra écrire la matrice $A \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ par blocs.)
- Soit $A \in H_{2n}$. Montrer que : $\forall t \in \mathbb{R}$, $e^{tA} \in Sp_{2n}$.
- En déduire que H_{2n} est inclus dans l'espace tangent à Sp_{2n} en I_{2n} . Cette inclusion est-elle une égalité ?

122. RMS 2026 1233 Centrale MP MPI

Soit U un ouvert d'un espace vectoriel normé E de dimension finie, soient a et b deux points distincts de U tels que le segment $[a, b]$ est inclus dans U .

- Soit $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $g(b) - g(a) = dg(c) \cdot (b - a)$. (On pourra utiliser la fonction $\varphi : t \mapsto g(tb + (1-t)a)$.)
- Soit $f : U \rightarrow F$, où F est un espace euclidien. On suppose que la fonction f est différentiable sur U et que sa différentielle $df : x \mapsto df(x)$ est bornée sur U . Montrer que $\|f(b) - f(a)\| \leq \sup_{x \in [a, b]} \|df(x)\|_{\text{op}} \times \|b - a\|$. (On pourra utiliser un vecteur $v \in F$ et la fonction $x \in U \mapsto \langle f(x), v \rangle \in \mathbb{R}$.)

123. RMS 2026 800 Mines-Ponts MP MPI

Soit $f : x \in \mathbb{R}^n \mapsto (f_1(x), \dots, f_n(x)) \in \mathbb{R}^n$.

- On suppose f de classe \mathcal{C}^2 . Montrer que $J_f(x)$ est antisymétrique pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ si, et seulement si, il existe $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$ tels que $f(x) = Ax + b$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.
- On suppose f de classe \mathcal{C}^1 . Montrer que $J_f(x)$ est symétrique pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ si, et seulement si, il existe $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 telle que $f = \nabla g$. (On pourra étudier le gradient de la fonction $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto \sum_{k=1}^n x_k \int_0^1 f_k(tx) dt$.)

3 Probabilités

124. RMS 2017 482 X ESPCI PC & RMS 2018 518 X ESPCI PC

On place aléatoirement $n \geq 3$ boules dans n urnes. Calculer la probabilité qu'une seule urne soit vide.

125. RMS 2017 900 Mines Ponts PC, RMS 2016 615 Mines Ponts PC

On lance deux dés équilibrés. Soient U_1 et U_2 deux variables aléatoires correspondant aux résultats des lancers des dés 1 et 2. On pose $X = \min\{U_1, U_2\}$ et $Y = \max\{U_1, U_2\}$.

- (a) Déterminer $P(X \geq k)$ et $P(Y \geq k)$ pour chaque $k \in \llbracket 1, 6 \rrbracket$.
- (b) Calculer XY en fonction de U_1 et U_2 et en déduire que $E(XY) = (\frac{7}{2})^2$.

126. RMS 2017 1353 CCP PSI

Deux joueurs jouent avec des pièces équilibrées. Ils lancent chacun n fois une pièce. Celui qui gagne est celui qui obtient le plus grand nombre de fois pile. Quelle est la probabilité qu'il y ait un gagnant ? On pourra utiliser (et éventuellement démontrer) l'égalité $\sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}$.

127. RMS 2021 132 1190 CCP PSI 2021, RMS 2018 129 207 CCP PSI 2018

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{N} , indépendantes, de même loi et admettant une variance. On suppose que la variable aléatoire $Z = X + Y + 1$ suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$.

- (a) Déterminer l'espérance et la variance de X .
- (b) Calculer la fonction génératrice de X sur $]0, 1[$.
- (c) En déduire la loi de X .

128. RMS 2016 964 CCP PSI

On considère une urne contenant $n - 1$ boules noires et une boule blanche.

- (a) On effectue une succession de tirages avec remise dans cette urne et on note T la variable aléatoire donnant le rang du premier tirage amenant la boule blanche. Donner les valeurs prises par T , sa loi, son espérance et sa variance.
- (b) On effectue maintenant des tirages sans remise.
 - i. Soit X la variable aléatoire donnant le rang du premier tirage amenant la boule blanche. Donner les valeurs prises par X , sa loi, son espérance et sa variance.
 - ii. Soit Y la variable aléatoire donnant le nombre de boules noires restantes dans l'urne après le tirage de la boule blanche. Exprimer Y en fonction de X et n . Donner l'espérance de Y ainsi que sa variance.

129. RMS 2016 614 Mines Ponts PC v2026

- (a) Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$.
Montrer que $\frac{1}{X}$ est d'espérance finie et calculer $E(\frac{1}{X})$.
- (b) Soit A l'ensemble des v.a. non constantes et strictement positives telles que $X \in L^1$ et $\frac{1}{X} \in L^1$.
Étudier $\inf_{X \in A} E(X)E(\frac{1}{X})$.

130. RMS 2017 1358 CCP PSI

Soit $n \geq 2$. On effectue des tirages avec remise dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n . On note X_n le rang du premier tirage où l'on obtient une boule différente de la première boule tirée.

- (a) Établir la loi de la variable aléatoire X_n .
- (b) Justifier l'existence de l'espérance de X_n et la calculer.

131. RMS 2016 967 ENSEA PSI

Soit X une variable aléatoire telle que $X \leftrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$. Montrer que $E(|X - \lambda|) = 2e^{-\lambda} \frac{\lambda^{N+1}}{N!}$, avec $N = \lfloor \lambda \rfloor$.

132. RMS 2017 1357 CCP PSI

Dans un casino, une machine renvoie un entier naturel N non nul selon la loi de probabilité : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(N = n) = \frac{1}{2^n}$. Le joueur gagne N jetons si N est pair ; il perd N jetons si N est impair.

- (a) Quelle est la probabilité de gagner ?
- (b) Déterminer l'espérance de la variable aléatoire G égale au gain algébrique du joueur.

133. RMS 2017 901 Mines Ponts PC

On lance une pièce qui a une probabilité p de donner pile. On note X le nombre de lancers nécessaires pour obtenir deux fois pile. Déterminer la loi de X et la fonction génératrice G_X de X . Calculer $E(X)$.

134. RMS 2016 803 Centrale PSI

Trois individus jouent au ballon :

- si A possède la balle, il l'envoie à B avec probabilité $\frac{1}{3}$ et à C avec probabilité $\frac{2}{3}$,
- si B possède la balle, il l'envoie à A avec probabilité $\frac{1}{2}$ et à C avec probabilité $\frac{1}{2}$,
- si C possède la balle, il l'envoie à B avec probabilité $\frac{1}{2}$ et à A avec probabilité $\frac{1}{2}$.

On note A_n l'événement : le joueur A reçoit le ballon au n -ième lancer, et on définit de même B_n, C_n . Étudier la limite des suites $P(A_n), P(B_n)$ et $P(C_n)$.

135. RMS 2017 1355 CCP PSI

Mots-clés : la loi du 0 - 1 de Borel

Soit (A_n) une suite d'événements indépendants.

- (a) Soient $n, p \in \mathbb{N}$. Montrer que la probabilité qu'aucun des événements A_n, \dots, A_{n+p} ne se réalise est inférieure ou égale à $\exp(-\sum_{k=n}^{n+p} P(A_k))$.
- (b) On suppose que la série de terme général $P(A_n)$ est divergente. Montrer qu'il est presque impossible qu'il n'y ait qu'un nombre fini d'entiers n pour lesquels A_n est réalisé.
- (c) Montrer que, si la série de terme général $P(A_n)$ converge, alors il est presque certain qu'il n'y ait qu'un nombre fini d'entiers n pour lesquels A_n est réalisé.

136. RMS 2016 630 Mines Ponts PC, RMS 2017 914 Mines Ponts PC

Mots-clés : maximum de lois géométriques indépendantes

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. Soit $Z = \max(X, Y)$. Déterminer l'espérance de Z .

137. RMS 2017 192 ENS PC

- (a) Pour tout $\lambda > 0$, soit X_λ une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ . Soit $c > 0$: montrer que $P(|X_\lambda - \lambda| \geq c\lambda) \rightarrow 0$ lorsque $\lambda \rightarrow +\infty$.
- (b) Soient, pour tout $\lambda > 0$, des variables aléatoires indépendantes $A_\lambda, B_\lambda, C_\lambda$ suivant une loi de Poisson de paramètre λ . Étudier l'espérance de $\Delta_\lambda = B_\lambda^2 - 4A_\lambda C_\lambda$.
- (c) Soit $E_\lambda(c) = (|A_\lambda - \lambda| < c\lambda) \cap (|B_\lambda - \lambda| < c\lambda) \cap (|C_\lambda - \lambda| < c\lambda)$. Montrer que $E_\lambda(\frac{1}{3}) \subset (\Delta_\lambda < 0)$.
- (d) Déterminer la limite, lorsque $\lambda \rightarrow +\infty$, de la probabilité que le polynôme $A_\lambda X^2 + B_\lambda X + C_\lambda$ ait toutes ses racines réelles.

138. RMS 2017 1077 Centrale PSI

Mots-clés : marche aléatoire dans \mathbb{Z}^2

On munit \mathbb{R}^2 de son repère orthonormé que l'on note (O, \vec{i}, \vec{j}) . Un marcheur, initialement en O , se déplace à chaque onstant n d'un pas dans l'une des quatre directions (nord, sud, est, ouest) de manière équiprobable. On note $A_n = (X_n, Y_n)$ sa position à l'instant n . On note aussi Z_n la distance du marcheur au point O à l'instant n .

- (a) Déterminer l'espérance et la variance de X_n .
- (b) Les deux variables aléatoires X_n et Y_n sont-elles indépendantes ? Déterminer leur covariance.
- (c) Montrer que $E(Z_n) \leq \sqrt{n}$.

139. RMS 2024 172 ENS MP MPI

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes telles que $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ sont finis.

- (a) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. Comparer $E(f(X))$ et $f(E(X))$.
- (b) On dit que $X \leq_c Y$ si, pour toute fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ convexe, $E(f(X)) \leq E(f(Y))$.
 - i. Donner un exemple de couple (X, Y) tel que $X \neq Y$ et $X \leq_c Y$.
 - ii. Montrer que, si $X \leq_c Y$, alors $E(X) = E(Y)$ et $V(X) \leq V(Y)$.

140. UPS 20240116

Mots-clés : inégalité de Cantelli

Soit X une variable aléatoire discrète réelle possédant une espérance $\mu = E(X)$ et une variance $\sigma^2 = V(X)$. Montrer que, pour tout $a > 0$, $P(X - \mu \geq a) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}$. (On pourra utiliser l'événement $(X - \mu + t)^2 \geq (a + t)^2$, où $t \in \mathbb{R}_+$).

141. B3 X

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes, indépendantes, à valeurs dans \mathbb{N} . Soit $p \in]0, 1[$.

- (a) On suppose que $X \sim \mathcal{B}(n_1, p)$ et $Y \sim \mathcal{B}(n_2, p)$ où $n_1, n_2 \in \mathbb{N}^*$. Qu'en déduire sur la v.a. $X + Y$?
 (b) On suppose que $X + Y \sim \mathcal{B}(n, p)$ où $n \in \mathbb{N}^*$. Qu'en déduire sur les v.a. X et Y ?

142. RMS 2025 824 Mines-Ponts MP MPI

Soient X et Y deux v.a. strictement positives, de même loi et d'espérance finie.

- (a) On suppose que X et Y sont indépendantes et que $\frac{1}{X}$ est d'espérance finie. Montrer que $\frac{X}{Y}$ est d'espérance finie et que $E\left(\frac{X}{Y}\right) \geq 1$.
 (b) On suppose que $\ln(X)$ et $\frac{X}{Y}$ sont d'espérance finie. Montrer que $E\left(\frac{X}{Y}\right) \geq 1$.

143. RMS 2026 1238 Centrale MP MPI

Mots-clés : loi de Poisson et transformée de Laplace

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

- (a) Montrer que $S_n \sim \mathcal{P}(n\lambda)$. et que, pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathbf{P}(|S_n - n\lambda| \geq n\varepsilon) \leq \frac{\lambda}{n\varepsilon^2}$.
 (b) Soit $x > 0$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\lfloor nx \rfloor} e^{-\lambda n} \frac{(n\lambda)^k}{k!} = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < x < \lambda, \\ 1 & \text{si } x > \lambda. \end{cases}$
 (c) Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue et nulle en dehors d'un segment. Montrer que la fonction $\mathcal{L}(f) : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt} dt$ est de classe \mathcal{C}^∞ et que, pour tout $x \geq 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\lfloor nx \rfloor} (-1)^k \frac{n^k}{k!} \mathcal{L}(f)^{(k)}(n) = \int_0^x f$.

144. RMS 2026 163 ENS MP MPI

On munit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique. Soit $X = (X_1 \dots X_n)^T$ un vecteur aléatoire tel que la v.a. $\|X\|^2$ est d'espérance finie.

- (a) Justifier que la matrice de covariance $C(X) = (\text{Cov}(X_i, X_j))_{1 \leq i, j \leq n}$ est bien définie. À quelle condition cette matrice est-elle diagonale ?
 (b) Soient le vecteur $v \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et la v.a. $Y = \langle v, X \rangle$. Montrer que $\mathbf{V}(Y) = v^T C(X) v$.
 (c) Montrer que $C(X) \in S_n^+$ et que, réciproquement, toute matrice $A \in S_n^+$ est la matrice de covariance d'un vecteur aléatoire X . (On pourra exhiber une matrice M telle $A = MM^T$ et un vecteur aléatoire Z tel que $C(Z) = I_n$.)