

K D O D U 2 8 / 0 5 / 2 0 2 6

Exercice 1. Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^1 et strictement croissante telle que $f([1, +\infty[) = [1, +\infty[$. Montrer que les intégrales $I = \int_1^{+\infty} \frac{1}{f(t)} dt$ et $J = \int_1^{+\infty} \frac{f^{-1}(x)}{x^2} dx$ sont de même nature.

Les hypothèses sur la fonction f garantissent l'existence et la continuité de sa réciproque f^{-1} .

Par le CDV $x = f(t)$ qui est bien de classe \mathcal{C}^1 et strictement croissant par hypothèse, les intégrales $J = \int_1^{+\infty} \frac{f^{-1}(x)}{x^2} dx$ et $K = \int_1^{+\infty} \frac{t}{f^2(t)} f'(t) dt$ sont de même nature (*). Soit $T \in [1, +\infty[$: après IPP, $\underbrace{\int_1^T \frac{t}{f^2(t)} f'(t) dt}_{=G(T)} = \underbrace{\left[\frac{-t}{f(t)} \right]_1^T}_{=-F(T)} + \underbrace{\int_1^T \frac{1}{f(t)} dt}_{=H(T)}$ (**).

Les fonctions G et H sont croissantes (car f et f^{-1} sont positives) et ont donc une limite en $+\infty$ d'après le théorème de la limite monotone et, par suite, la fonction F aussi car $F = H - G$.

Ou bien $\exists \ell \in \mathbb{R}$, $F(T) \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} \ell$: alors l'intégrale I est de même nature que l'intégrale K d'après (**), donc de même nature que l'intégrale J d'après (*).

Ou bien $F(T) \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} +\infty$: alors $\frac{T}{f(T)} = \frac{f^{-1}(X)}{X} \xrightarrow{X \rightarrow +\infty} +\infty$. D'où $\exists x_0, \forall x \geq x_0, \frac{f^{-1}(x)}{x} \geq 1$, ce qui implique $\frac{f^{-1}(x)}{x^2} \geq \frac{1}{x}$. D'où $\int_1^X \frac{f^{-1}(x)}{x^2} dx \xrightarrow{X \rightarrow +\infty} +\infty$. D'après (*), l'intégrale K diverge, d'où $G(T) = \int_1^T \frac{t}{f^2(t)} f'(t) dt \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} +\infty$ et, d'après (**), $H(T) \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} +\infty$, d'où l'intégrale I diverge. Les intégrales I et J sont donc de même nature.

L'exercice ci-dessous est une version discrète du précédent. Pour le résoudre, on recourt à l'analogie discret de l'IPP, la transformation d'Abel ▷ **Kdo du 14/01/2026 & oral blanc n° 74 RMS 2012 328 X ESPCI PC**.

Exercice 2. Soit f une fonction continue et strictement croissante telle que $f([1, +\infty[) = [1, +\infty[$. Montrer que les séries $\sum \frac{1}{f(n)}$ et $\sum \frac{f^{-1}(n)}{n^2}$ sont de même nature.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{f^{-1}(n)}{n^2} = \frac{u_n}{n^2} \sim u_n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$ (♥) en posant $u_n = f^{-1}(n)$.

$$\text{Après transformation d'Abel, } \underbrace{\sum_{k=1}^n u_k \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)}_{=G_n} = \underbrace{\sum_{k=2}^n \frac{u_k - u_{k-1}}{k}}_{=H_n} + \underbrace{\frac{u_1}{1} - \frac{u_n}{n+1}}_{=-F_n}.$$

Les suites (G_n) et (H_n) sont croissantes (car la suite (u_n) est positive) et ont donc une limite d'après le théorème de la limite monotone ; la suite (F_n) aussi car $F_n = H_n - G_n$ (♥♥).

— Dans un premier temps, mq la suite (H_n) et la série $\sum \frac{f^{-1}(n)}{n^2}$ sont de même nature.

Ou bien $\exists \ell \in \mathbb{R}$, $F_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ell$: alors la suite (H_n) est de même nature que la série $\sum u_k \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$ d'après (♥♥), donc de même nature que la série $\sum \frac{f^{-1}(n)}{n^2}$ d'après l'équivalence (♥) de suites positives.

Ou bien $F_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$: alors $\frac{u_n}{n+1} = \frac{f^{-1}(n)}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$. D'où $\exists n_0, \forall n \geq n_0, \frac{f^{-1}(n)}{n+1} \geq 1$, ce qui implique $\frac{f^{-1}(n)}{n^2} \geq \frac{1}{n}$. D'où la série $\sum \frac{f^{-1}(n)}{n^2}$ diverge. D'après l'équivalence (♥), il en est de même de la série $\sum u_n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$, d'où $G_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$ et, d'après (♥♥), $H_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$.

— Dans un second temps, mq la suite (H_n) est de même nature que la série $\sum \frac{1}{f(n)}$. La fonction $\frac{1}{f}$ étant continue et décroissante, la série $\sum \frac{1}{f(n)}$ est de même nature que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{f(t)} dt$. Or $0 \leq \frac{u_k - u_{k-1}}{k} = \frac{u_k - u_{k-1}}{f(u_k)} = \int_{u_{k-1}}^{u_k} \frac{dt}{f(t)} \leq \int_{u_{k-1}}^{u_k} \frac{dt}{f(t)}$ car la fonction f est croissante. D'où la suite (H_n) cv si l'intégrale cv. De même, $\frac{u_k - u_{k-1}}{k-1} = \frac{u_k - u_{k-1}}{f(u_{k-1})} = \int_{u_{k-1}}^{u_k} \frac{dt}{f(t)} \geq \int_{u_{k-1}}^{u_k} \frac{dt}{f(t)}$. D'où la suite (H_n) dv si l'intégrale dv.

— Les séries $\sum \frac{1}{f(n)}$ et $\sum \frac{f^{-1}(n)}{n^2}$ sont donc de même nature.