Kdo du 28/05/2026

Exercice 1. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement croissante telle que $f([1,+\infty[) = [1,+\infty[$. Montrer que les intégrales $I = \int_1^{+\infty} \frac{1}{f(t)}\,dt$ et $J = \int_1^{+\infty} \frac{f^{-1}(x)}{x^2}\,dx$ sont de même nature.

Les hypothèses sur la fonction f garantissent l'existence et la continuité de sa réciproque f^{-1}.

Par le CDV $x = f(t)$ qui est bien de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement croissant par hypothèse, les intégrales $J = \int_1^{+\infty} \frac{f^{-1}(x)}{x^2}\,dx$ et $K = \int_1^{+\infty} \frac{t}{f^2(t)} f'(t)\,dt$ sont de même nature $(*)$. Soit $T \in [1,+\infty[$: après IPP, $\underbrace{\int_1^T \frac{t}{f^2(t)} f'(t)\,dt}_{=G(T)} = \underbrace{\int_1^T \frac{1}{f(t)}\,dt}_{=H(T)} + \left[\frac{-t}{f(t)}\right]_1^T$ $(**)$.

Les fonctions G et H sont croissantes (car f et f^{-1} sont positives) et ont donc une limite en $+\infty$ d'après le théorème de la limite monotone.

Si l'intégrale J converge, alors l'intégrale K aussi d'après $(*)$ et montrons que l'intégrale I aussi. Par l'absurde : si l'intégrale I diverge, alors $\frac{T}{f(T)} = \frac{f^{-1}(X)}{X} \underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. D'où $\exists x_0,\ \forall x \geq x_0,\ \frac{f^{-1}(x)}{x} \geq 1$, ce qui implique $\frac{f^{-1}(x)}{x^2} \geq \frac{1}{x}$. D'où $\int_1^X \frac{f^{-1}(x)}{x^2}\,dx \underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, ce qui est absurde car l'intégrale K converge.

Si l'intégrale I converge, alors montrons que l'intégrale J aussi : la fonction G est majorée par $I - \frac{1}{f(1)}$ d'après $(**)$, ce qui rend finie $\lim\limits_{T\to+\infty} G(T)$, d'où l'intégrale K converge et donc l'intégrale J aussi d'après $(*)$.

L'exercice ci-dessous est une version discrète du précédent. Pour le résoudre, on recourt à l'analogue discret de l'IPP, la transformation d'Abel ▷ **Kdo du 14/01/2026 & oral blanc n^o 74 RMS 2012 328 X ESPCI PC**.

Exercice 2. Soit f une fonction continue et strictement croissante telle que $f([1,+\infty[) = [1,+\infty[$. Montrer que les séries $\sum \frac{1}{f(n)}$ et $\sum \frac{f^{-1}(n)}{n^2}$ sont de même nature.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{f^{-1}(n)}{n^2} = \frac{u_n}{n^2} \sim u_n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$ $(\heartsuit)$ en posant $u_n = f^{-1}(n)$.

Après transformation d'Abel, $\underbrace{\sum_{k=1}^{n} u_k\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)}_{=G_n} = \underbrace{\sum_{k=2}^{n} \frac{u_k - u_{k-1}}{k}}_{=H_n} + \frac{u_1}{1} - \frac{u_n}{n+1}$ $(\heartsuit\heartsuit)$.

Lss suites (G_n) et (H_n) sont croissantes (car la suite (u_n) est positive) et ont donc une limite d'après le théorème de la limite monotone.

Supposons que la série $\sum \frac{f^{-1}(n)}{n^2}$ converge, alors la série $\sum u_n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$ aussi d'après $(\heartsuit)$ et montrons que la série $\sum \frac{1}{f(n)}$ aussi. Par l'absurde : si la série $\sum \frac{1}{f(n)}$ diverge, alors l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{f(t)}\,dt$ aussi car, la fonction $\frac{1}{f}$ étant continue et décroissante, la série $\sum \frac{1}{f(n)}$ et de même nature que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{f(t)}\,dt$. Or $\frac{u_k - u_{k-1}}{k} \sim \frac{u_k - u_{k-1}}{k-1} = \frac{u_k - u_{k-1}}{f(u_{k-1})} = \int_{u_{k-1}}^{u_k} \frac{dt}{f(u_{k-1})} \geq \int_{u_{k-1}}^{u_k} \frac{dt}{f(t)}\,dt$. D'où la suite (H_n) dv, donc $\frac{u_n}{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$ d'après $(\heartsuit\heartsuit)$. D'où $\exists n_0,\ \forall n \geq n_0,\ \frac{u_n}{n} \geq 1$, ce qui implique $\frac{f^{-1}(n)}{n^2} \geq \frac{1}{n}$, d'où la série $\sum \frac{f^{-1}(n)}{n^2}$ diverge, ce qui est absurde.

Supposons que la série $\sum \frac{1}{f(n)}$ converge, alors $\int_1^{+\infty} \frac{1}{f(t)}\,dt$ aussi. Or $0 \leq \frac{u_k - u_{k-1}}{k} = \frac{u_k - u_{k-1}}{f(u_k)} = \int_{u_{k-1}}^{u_k} \frac{dt}{f(u_k)} \leq \int_{u_{k-1}}^{u_k} \frac{dt}{f(t)}\,dt$ car la fonction f est croissante. D'où la suite (H_n) cv, donc la suite (G_n) est majorée par $\lim\limits_{n\to\infty} H_n + \frac{u_1}{1}$ d'après $(\heartsuit\heartsuit)$, ce qui rend finie $\lim\limits_{n\to\infty} G_n$. Donc la série $\sum \frac{f^{-1}(n)}{n^2}$ converge d'après $(\heartsuit)$.