

TEST DE MATHÉMATIQUES

Durée : 2 heures. Les calculatrices sont interdites.

On attachera un grand soin à la rédaction. En particulier, chaque résultat ou conclusion devra être encadré.

On peut toujours admettre les résultats des questions précédentes pour traiter les questions suivantes.

Exercice 1 (fonctions, polynômes).

1. Énoncer le théorème de Rolle.
2. Soient un réel a et une fonction f continue sur $[a, +\infty[$ et dérivable sur $]a, +\infty[$. On pose

$$g(x) = f\left(a + \frac{1}{x} - 1\right)$$

pour tout $x \in]0, 1[$. Montrer que la fonction g est bien définie, qu'elle est dérivable et déterminer sa dérivée.

3. On suppose que la fonction f s'annule en a et tend vers 0 en $+\infty$. Montrer que la fonction g est prolongeable par continuité en 0. Que vaut alors $g(0)$?
4. En déduire qu'il existe un réel $b \in]a, +\infty[$ tel que $f'(b) = 0$.
5. Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$.

Montrer que la fonction $f : x \mapsto P(x)e^{-x}$ est dérivable sur \mathbb{R} et déterminer sa dérivée.

6. En déduire que : si le polynôme $P - P'$ n'a pas de racine réelle, alors le polynôme P non plus.

Exercice 2 (intégrales, suites & séries). Soient, pour tout réel $t \in [1, +\infty[$ et tout entier $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f(t) = \frac{t}{t^2 + t + 1} \quad \text{et} \quad u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t) \sin t \, dt.$$

1. Étudier le sens de variation de la fonction f .
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = (-1)^n \int_0^\pi f(t + n\pi) \sin(t) \, dt$.
3. Étudier le signe de $|u_n| - |u_{n+1}|$.
4. Montrer que $|u_n| \sim \frac{2}{n\pi}$.
5. Quelles sont les natures des séries $\sum |u_n|$ et $\sum u_n$?

Exercice 3 (algèbre linéaire). Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie. Soient f et g deux symétries, *i.e.* deux endomorphismes de E tels que

$$f^2 = \text{id}_E = g^2.$$

On note A l'ensemble des vecteurs tels que $f(x) = x$ et B l'ensemble des vecteurs tels que $f(x) = -x$.

1. Justifier que A est un sous-espace vectoriel de E .
(On admettra qu'il en de même pour B .)
2. Justifier que $A \oplus B = E$.
(Un théorème du cours, clairement énoncé, devrait suffire.)
3. Justifier que $\dim g(A) = \dim A$.
(On admettra que, de même, $\dim g(B) = \dim B$.)
4. On suppose que les symétries f et g anticommulent, *i.e.*

$$f \circ g = -g \circ f.$$

Soient deux vecteurs $a \in A$ et $b \in B$.

Montrer que $g(a) \in B$ et que $g(b) \in A$.

5. Soient $n = \dim A$ et (e_1, \dots, e_n) une base de A .

Montrer que $(g(e_1), \dots, g(e_n))$ est une base de B .

6. Soit $\mathcal{C} = (e_1, \dots, e_n, g(e_1), \dots, g(e_n))$.
Justifier que \mathcal{C} est une base de E .
7. Écrire les matrices de f et de g dans la base \mathcal{C} .