

CORRIGÉ DU TEST DE MATHÉMATIQUES

Exercice 1 (fonctions, polynômes).

1. Énoncer le théorème de Rolle.
2. Soient un réel a et une fonction f continue sur $[a, +\infty[$ et dérivable sur $]a, +\infty[$. On pose

$$g(x) = f\left(a + \frac{1}{x} - 1\right)$$

pour tout $x \in]0, 1]$. Montrer que la fonction g est bien définie, qu'elle est dérivable et déterminer sa dérivée.

3. On suppose que la fonction f s'annule en a et tend vers 0 en $+\infty$. Montrer que la fonction g est prolongeable par continuité en 0. Que vaut alors $g(0)$?
4. En déduire qu'il existe un réel $b \in]a, +\infty[$ tel que $f'(b) = 0$.
5. Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$. Montrer que la fonction $f : x \mapsto P(x)e^{-x}$ est dérivable sur \mathbb{R} et déterminer sa dérivée.
6. En déduire que : si le polynôme $P - P'$ n'a pas de racine réelle, alors le polynôme P non plus.

1. Soit φ une fonction continue sur $[0, 1]$ et dérivable sur $]0, 1[$. Si $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$, alors $\exists c \in]0, 1[$, $\varphi'(c) = 0$.
2. Pour tout $x \in]0, 1]$, $a + \frac{1}{x} - 1 \in]0, 1[$, ce qui rend la fonction g bien définie. Cette fonction g est la composée $f \circ h$ des fonctions dérivables f et $h : x \mapsto a + \frac{1}{x} - 1$, elle est donc dérivable et $\forall x \in]0, 1[$, $g'(x) = -\frac{1}{x^2} \cdot f'\left(a + \frac{1}{x} - 1\right)$.
3. $\lim_{0^+} g = \lim_{+\infty} f = 0$ ce qui rend continue en 0 la fonction g si on pose $0 = g(0)$.
4. La fonction g prolongée est d'une part continue sur $[0, 1]$, d'autre part dérivable sur $]0, 1[$. Or $g(0) = g(1) = 0$. D'après le théorème de Rolle, il existe donc $c \in]0, 1[$ tel que $g'(c) = 0$, d'où $f'\left(a + \frac{1}{c} - 1\right) = 0$. Le réel $b = a + \frac{1}{c} - 1$ vérifie $b > a$ et $f'(b) = 0$.
5. La fonction f est dérivable et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = P'(x)e^{-x} + P(x)(-e^{-x}) = [P'(x) - P(x)] \cdot e^{-x}$ car f est le produit de deux fonctions dérivables.
6. En contraposant : supposons que le polynôme P possède une racine réelle a . Alors la fonction $f : x \mapsto P(x)e^{-x}$ s'annule en a . Or elle tend vers 0 en $+\infty$ par croissances comparées, donc il existe $b > a$ tel que $f'(b) = 0$ d'après la question 4. D'où $[P'(b) - P(b)] \cdot e^{-b} = 0$. Or $e^{-b} \neq 0$. Donc $P'(b) - P(b) = 0$.

Exercice 2 (intégrales, suites & séries). Soient, pour tout réel $t \in [1, +\infty[$ et tout entier $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f(t) = \frac{t}{t^2 + t + 1} \quad \text{et} \quad u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t) \sin t \, dt.$$

1. Étudier le sens de variation de la fonction f .
 2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = (-1)^n \int_0^\pi f(t + n\pi) \sin(t) \, dt$.
 3. Étudier le signe de $|u_n| - |u_{n+1}|$.
 4. Montrer que $|u_n| \sim \frac{2}{n\pi}$.
 5. Quelles sont les natures des séries $\sum |u_n|$ et $\sum u_n$?
-

1. La fonction f est dérivable sur $[1, +\infty[$. Elle est décroissante car

$$\forall t \in [1, +\infty[, \quad f'(t) = \frac{t^2 + t + 1 - t(2t + 1)}{(t^2 + t + 1)^2} = \frac{-t^2 + 1}{(t^2 + t + 1)^2} \leq 0.$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le changement de variable $t = u + n\pi$ (qui est bien de classe \mathcal{C}^1) montre que

$$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t) \sin t \, dt = \int_0^\pi f(u + n\pi) \sin(u + n\pi) \, du$$

Or $\sin(u + n\pi) = (-1)^n \sin u$, d'où

$$u_n = (-1)^n \int_0^\pi f(t + n\pi) \sin(t) \, dt.$$

3. Comme la fonction f est positive et comme la fonction \sin est positive sur $[0, \pi]$, $|u_n| = \int_0^\pi f(t + n\pi) \sin t \, dt$.

D'où $|u_n| - |u_{n+1}| = \int_0^\pi [f(t + n\pi) - f(t + (n+1)\pi)] \sin(t) \, dt$.

Or la fonction f est décroissante, d'où $[f(t + n\pi) - f(t + (n+1)\pi)] \geq 0$, donc $|u_n| - |u_{n+1}| \geq 0$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$: $|u_n| = \int_0^\pi f(t + n\pi) \sin t \, dt$ et la fonction f est décroissante, d'où

$$2f((n+1)\pi) = f((n+1)\pi) \int_0^\pi \sin t \, dt = \int_0^\pi f((n+1)\pi) \sin t \, dt \leq |u_n| \leq \int_0^\pi f(n\pi) \sin t \, dt = f(n\pi) \int_0^\pi \sin t \, dt = 2f(n\pi)$$

D'où, en divisant par $\frac{2}{n\pi}$ qui est strictement positif,

$$n\pi f((n+1)\pi) \leq \frac{|u_n|}{\frac{2}{n\pi}} \leq n\pi f(n\pi)$$

Or $n\pi f(n\pi)$ et $n\pi f((n+1)\pi)$ tendent vers 1 d'après l'expression de f , d'où $\frac{|u_n|}{\frac{2}{n\pi}}$ tend vers 1 d'après le théorème des gendarmes. Donc $|u_n| \sim \frac{2}{n\pi}$.

5. D'une part, $|u_n| \sim \frac{2}{n\pi}$ qui ne change pas de signe et la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge, donc la série $\sum |u_n|$ diverge aussi.

D'autre part, $u_n = (-1)^n |u_n|$ et la suite $(|u_n|)$ tend vers 0 (d'après son équivalent trouvé à la question 4) en décroissant (d'après la question 3), donc la série $\sum u_n$ converge d'après le théorème des séries alternées.

Exercice 3 (algèbre linéaire).

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie. Soient f et g deux symétries, *i.e.* deux endomorphismes de E tels que

$$f^2 = \text{id}_E = g^2.$$

On note A l'ensemble des vecteurs tels que $f(x) = x$ et B l'ensemble des vecteurs tels que $f(x) = -x$.

- Justifier que A est un sous-espace vectoriel de E . (On admettra qu'il en est de même pour B .)
- Justifier que $A \oplus B = E$. (Un théorème du cours, clairement énoncé, devrait suffire.)
- Justifier que $\dim g(A) = \dim A$. (On admettra que, de même, $\dim g(B) = \dim B$.)
- On suppose que les symétries f et g anticommulent, *i.e.*

$$f \circ g = -g \circ f.$$

Soient deux vecteurs $a \in A$ et $b \in B$. Montrer que $g(a) \in B$ et que $g(b) \in A$.

- Soient $n = \dim A$ et (e_1, \dots, e_n) une base de A . Montrer que $(g(e_1), \dots, g(e_n))$ est une base de B .
- Soit $\mathcal{C} = (e_1, \dots, e_n, g(e_1), \dots, g(e_n))$. Justifier que \mathcal{C} est une base de E .
- Écrire les matrices de f et de g dans la base \mathcal{C} .

1. Soit $x \in E$: $x \in A \iff f(x) = x \iff (f - \text{id}_E)(x) = 0_E \iff x \in \text{Ker}(f - \text{id}_E)$. Or tout noyau est un *sev* (d'après le cours), donc A est un *sev* de l'*ev* E .

AUTRE MÉTHODE — Le vecteur nul 0_E appartient à A car $f(0_E) = 0_E$ par linéarité de f . Soient $(x, y) \in A^2$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$: $\alpha x + \beta y \in A$ car

$$\begin{aligned} f(\alpha x + \beta y) &= \alpha f(x) + \beta f(y) \text{ car } f \text{ est linéaire} \\ &= \alpha x + \beta y \text{ car } (x, y) \in A^2. \end{aligned}$$

Ainsi la partie A de l'*ev* E contient le vecteur nul et est stable par combinaisons linéaires, c'est donc un *sev* de E .

2. L'endomorphisme f est une symétrie, c'est (d'après le cours) la symétrie par rapport au $sev A = \text{Ker}(f - \text{id}_E)$ parallèlement au $sev B = \text{Ker}(f + \text{id}_E)$ et ces $sev A$ et B sont supplémentaires.
3. De $g \circ g = \text{id}_E$, on tire que l'endomorphisme g est bijectif. Donc les $sev A$ et $g(A)$ ont la même dimension.
4. Soit $a \in A$:

$$\begin{aligned} f[g(a)] &= f \circ g(a) = -g \circ f(a) \text{ car } f \text{ et } g \text{ anticommulent} \\ &= -g(a) \text{ car } f(a) = a \text{ par définition de } A \end{aligned}$$

Ainsi le vecteur $y = g(a)$ vérifie $f(y) = -y$, il appartient donc au $sev B$.

De même, soit $b \in B$:

$$\begin{aligned} f[g(b)] &= f \circ g(b) = -g \circ f(b) \\ &= -g(-b) \text{ car } f(b) = -b \text{ par définition de } B \\ &= g(b) \end{aligned}$$

Ainsi le vecteur $g(b)$ appartient au $sev A$.

5. De la question 4, on tire que $g(A) \subset B$ et $g(B) \subset A$, d'où

$$\dim g(A) \leq \dim B \quad \text{et} \quad \dim g(B) \leq \dim A.$$

Depuis la question 3, on sait que

$$\dim g(A) = \dim A \quad \text{et} \quad \dim g(B) = \dim B.$$

D'où $\dim A \leq \dim B$ et $\dim B \leq \dim A$, donc

$$\dim B = \dim A = n.$$

L'application linéaire g est bijective et la famille $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est libre (car c'est une base de A), d'où la famille $\mathcal{B}' = (g(e_1), \dots, g(e_n))$ est aussi une famille libre du $sev B$ (car $g(A) \subset B$). Et le cardinal n de \mathcal{B}' est égal à la dimension de B . Donc \mathcal{B}' est une base de B .

6. Les $sev A$ et B sont supplémentaires d'après la question 2, la concaténation des bases \mathcal{B} et \mathcal{B}' est donc une base de l'ev E .
7. Notons $e_{i+n} = g(e_i)$ pour chaque $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Dans la base $\mathcal{C} = (e_1, \dots, e_{2n})$, la matrice de f est

$$\begin{array}{l} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \\ e_{n+1} \\ e_{n+2} \\ \vdots \\ e_{2n} \end{array} \begin{pmatrix} f(e_1) & f(e_2) & \cdots & f(e_n) & f(e_{n+1}) & f(e_{n+2}) & \cdots & f(e_{2n}) \\ 1 & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & 1 & & & & (0) \\ & & & & -1 & & & \\ & & & & & -1 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ (0) & & & & & & & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -I_n \end{pmatrix}$$

car $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $f(e_i) = e_i$ et $f(e_{i+n}) = -e_{i+n}$. Les égalités $e_{n+1} = g(e_1), \dots, e_{2n} = g(e_n)$ donnent $g(e_{n+1}) = g^2(e_1) = e_1, \dots, g(e_{2n}) = g^2(e_n) = e_n$ car $g^2 = \text{id}_E$, donc la matrice de g dans la base \mathcal{C} est

$$\begin{array}{l} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \\ e_{n+1} \\ e_{n+2} \\ \vdots \\ e_{2n} \end{array} \begin{pmatrix} g(e_1) & g(e_2) & \cdots & g(e_n) & g(e_{n+1}) & g(e_{n+2}) & \cdots & g(e_{2n}) \\ & & & & 1 & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & (0) & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 1 \\ 1 & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & & & & (0) & \\ & & & & 1 & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}.$$