

Exercices d'oraux de mathématiques

Sélection d'énoncés rapportés d'oraux donnés aux concours et classés par thèmes

Les exercices suivants sont corrigés :

Léandre 46+67 / Tiago 45 / Arthur 119+124 / Damien 125+CCP56 / Erwann 34+CCP6 / Dhyae 28+CCP14 // Valentin 1+68 // Jules Morel 52+76 / Baptiste V 77 / Céleste 37+CCP2 / Oscar 39+CCP4 / Naoelle 38+CCP5 / Timothée 5+CCP53 / Jules Métaireau 25+CCP36 / Alexandre 47 / Rami 24+CCP52 / Paul 71+CCP74 / Neji 73+CCP77 // Neji 81 / Soren 78 / Florian 20+CCP15 / Lucas P 48+63 / Victor 22+CCP17 / Marius V 83+18 // Maxence 7+108 / Noé 2+CCP49 / Romain 36+CCP57 / Marius LC 110+CCP108 / Elliot 105+CCP110 / Le Goff 43+CCP9 // Marius C 6 / Evan 3+CCP11 / Marion 58+CCP16 / Rafaël 59+CCP19 / Gabriel 126+CCP18 / Alexis 127 / Dhyae 9+CCP13 / Tiago 10 / Lucas VM 130+CCP28 / Erwan L 42+CCP25 / Matthieu 131+CCP30 / Baptiste S 41+CCP31 / Louka 56+CCP29 // Marius LC 12 / Gaëlle 4+CCP66 / Malo 72+CCP79 / Evan 136+CCP21 / Rami 80+CCP86 / Damien 70+129 // Rafaël 19 / Florian 14+CCP100 / Céleste 88 / Gaëlle 84+CCP105 / Timothée 79 / Arnaud 92+CCP80 / Soren 93+CCP63 / Oscar 97+30 / Malo 62+CCP 50 // Noé 82 / Paul 128 / Arnaud CCP101+113 / Alexis CCP7+CCP84 / Marius V CCP39+CCP107 / Marius C CCP60+CCP10 // Evan 106 / Alexandre 11 / Neji 35+CCP29 / Victor CCP32+CCP89 / Tobias 91+CCP59 / Matthieu CCP64+133 / Arthur 66+64 / Marion CCP42+CCP62 / Baptiste V 53 // Louka CCP8+CCP71 / Romain CCP20+CCP81 / Gaëlle 8 // Jules Morel 33 / Elliot 40+34 / Naoelle 23 / Gabriel 27+CCP24 / Arthur 61+111 / Tiago 85 / Damien 85 / Lucas 27+CCP24 / Maxence 109 / Marius LC 40+34 / Florian CCP52+18 / Victor CCP85+69 // Marius C 17+ 90 / Alexis 26+CCP53 / Dhyae 75+89 / Baptiste S 29+CCP51 // Gabriel 86+CCP60 / Rafaël 100+CCP68 / Arnaud 132+CCP26 // Soren 135 / Baptiste S 134 / Oscar 117 / Naoelle 116 / Dhyae 118 / Alexandre 122 // Oscar 121 / Alexis 40+86 / Arnaud 62+72 / Maxence 143 / Céleste 144 / Valentin 123 // Marius V 13+87 / Baptiste S 21+112 / Rafaël 60+94 / Evan 95+142 / Paul 13+CCP36 / Marius LC 140+CCP59 / Marion 141+114 / Jules Morel 51 / Timothée 54 // Victor 57+96 / Marius LC 55+CCP / Erwan 27+CCP26 / Gabriel 55+ 16 / Arnaud 89+22 / Marius V 15+57 / Alexis 104+16 / Louka 101+6 / Maxence 137 / Jules Métaireau 138 / Neji 31+102 / Louka // Marion 115 / Tobias 99+CCP81 / Malo 98 / Paul 32 +115 / Lucas VM 103 / / 65 / 74 / 120 /

1 Algèbre

1.1 Sous-espaces vectoriels & applications linéaires

1. RMS 132 1126 CCINP PSI 2021

Soient E un espace vectoriel de dimension 4 et u un endomorphisme de E . Montrer que :

(a) si $\text{rg}(u) = 2$ et $u^2 = 0$, alors il existe une base dans laquelle u est représenté par $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

(b) si $\text{rg}(u) = 3$ et $u^4 = 0$, alors $\text{Ker}(u^2) = \text{Im}(u^2)$ et il existe une base dans laquelle u est représenté par $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

SOLUTION —

- (a) De $u^2 = 0$, on déduit que $\text{Im}(u) \subset \text{Ker}(u)$. Et ils ont la même dimension car $\dim \text{Ker}(u) = 4 - 2$ d'après le théorème du rang. Soit (e_1, e_2) une base de $\text{Ker}(u)$. Comme $\text{Ker}(u) = \text{Im}(u)$, il existe $(e_3, e_4) \in E^2$ tel que $u(e_3) = e_1$ et $u(e_4) = e_2$. La famille (e_1, e_2, e_3, e_4) est libre car

$$\begin{aligned} \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_4 = 0_E &\implies \alpha_3 e_1 + \alpha_4 e_2 = 0_E \text{ en appliquant } u \\ &\implies \alpha_3 = \alpha_4 = 0 \text{ car } (e_1, e_2) \text{ est libre} \\ &\implies \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 = 0_E \\ &\implies \alpha_1 = \alpha_2 = 0. \end{aligned}$$

Cette famille libre est de cardinal 4, c'est donc une base. De plus, la matrice représentant u dans cette base est de la forme voulue.

(b) Montrons que $u^2 = 0$ est absurde : si $u^2 = 0$, alors $\text{Im}(u) \subset \text{Ker}(u)$, d'où $3 = \text{rg}(u) \leq \dim \text{Ker}(u)$, ce qui est absurde car $\text{rg}(u) + \dim \text{Ker}(u) = \dim E = 4$ d'après le théorème du rang.

Montrons ensuite que $u^3 = 0$ est absurde : de $u^2 \neq 0$, on déduit qu'il existe un vecteur x tel que $u^2(x) \neq 0$. On vérifie que la famille $(u^2(x), u(x), x)$ est libre car $u^3 = 0$. Il suffit alors d'un vecteur y pour compléter la famille libre $(u^2(x), u(x))$ en une base $(y, u^2(x), u(x))$ de $\text{Im}(u)$ car $3 = \text{rg}(u)$. On vérifie que $(y, u^2(x), u(x), x)$ est alors une famille libre et donc une base de E car son cardinal est égal à la dimension de E . Et la matrice de u dans cette base est de

la forme $N = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. De $3 = \text{rg}(u)$, on déduit que $3 = \text{rg}(N)$, d'où $a \neq 0$. Et, de $u^3 = 0$, on déduit que

$N^3 = 0$, d'où $a^3 = 0$. C'est absurde.

Pour finir, de $u^3 \neq 0$, on déduit qu'il existe un vecteur x tel que $u^3(x) \neq 0$. On vérifie que la famille $(u^3(x), u^2(x), u(x), x)$ est libre car $u^4 = 0$. C'est donc une base de E car son cardinal est égal à la dimension de E . Dans cette base, la

matrice M représentant u a la forme voulue : $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ car $u^4 = 0$. D'où $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est la

matrice représentant u^2 . On en déduit que $\text{Ker}(u^2) = \text{Im}(u^2)$.

2. RMS 2012 275 X ESPCI PC, RMS 2013 305 X ESPCI PC, RMS 2013 869 Centrale PC

Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\Phi: M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto AMB$. Calculer la trace de Φ .

SOLUTION —

Pour $1 \leq i, j \leq n$, soient $E_{i,j} = (\delta_{k,i} \delta_{j,\ell})_{1 \leq k, \ell \leq n}$ les matrices élémentaires. On calcule le terme (i, j) de la matrice $\Phi(E_{i,j})$: il vaut $\sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n a_{i,k} \delta_{k,i} \delta_{j,\ell} b_{\ell,j} = a_{i,i} b_{j,j}$. Par suite

$$\text{tr } \Phi = \sum_{1 \leq i, j \leq n} [\Phi(E_{i,j})]_{i,j} = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,i} b_{j,j} = \left(\sum_{i=1}^n a_{i,i} \right) \left(\sum_{j=1}^n b_{j,j} \right) = \text{tr}(A) \text{tr}(B).$$

3. RMS 2007 768 Centrale PSI

Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E . On suppose que $E = F \oplus G$ et on note p le projecteur sur F parallèlement à G et $q = \text{id}_E - p$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que F est stable par f si et seulement si $q \circ f \circ p = 0$.

SOLUTION — On suppose que F est stable par f . Soit $x = y + z \in E$ avec $(y, z) \in F \times G$. Alors, par définition des projecteurs p et q :

$$(q \circ f \circ p)(x) = (q \circ f)(y) = q \left(\underbrace{f(y)}_{\in F} \right) = 0.$$

Réciproquement, on suppose que $q \circ f \circ p = 0$. Soit $y \in F$. Alors $y = p(y)$, donc $q(f(y)) = (q \circ f \circ p)(y) = 0$, ce qui montre que $f(y)$ est dans le noyau de q , à savoir F .

4. RMS 2016 969 CCP PC & RMS 2010 814 Centrale PSI

Soit $S: \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'application qui à f associe $S(f): x \mapsto \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} f(t) dt$.

- Montrer que, si $S(f) = 0$, alors f est périodique.
- L'application S est-elle injective ? surjective ?
- Soit $n \geq 2$. Montrer que S induit un endomorphisme sur $\mathbb{R}_n[X]$, noté s .
- L'endomorphisme s est-il bijectif ? diagonalisable ?

SOLUTION —

- Comme f est continue, elle possède une primitive $F: x \mapsto \int_7^x f(t) dt$ et $S(f): x \mapsto \frac{1}{2}F(x+1) - \frac{1}{2}F(x-1)$ est \mathcal{C}^1 . De plus $S(f)'(x) = \frac{1}{2}F'(x+1) - \frac{1}{2}F'(x-1) = \frac{1}{2}[f(x+1) - f(x-1)]$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Si $S(f) = 0$, alors la fonction $S(f)$ est constante, d'où sa dérivée est nulle, donc $f(x+1) = f(x-1)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc f est 2-périodique.
- On cherche deux contre-exemples. La fonction S n'est pas injective car la fonction $t \mapsto \sin(\pi t)$ (continue et non nulle) appartient à son noyau et elle n'est pas surjective car $x \mapsto |x|$ est continue mais pas \mathcal{C}^1 , donc elle n'appartient pas à l'image.

(c) La fonction S est linéaire et pour $f_k(x) = x^k$ on trouve :

$$S(f_k)(x) = \frac{1}{2(k+1)} [(x+1)^{k+1} - (x-1)^{k+1}] = \frac{1}{2(k+1)} \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} [1 - (-1)^{k+1-i}] x^i = x^k + \dots$$

On en déduit que $S(f_k)$ est un polynôme de degré $\leq k$. Par linéarité S induit bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

(d) Le calcul fait en (c) donne que, dans la base canonique $\mathcal{B} = (f_0, \dots, f_n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$, la matrice de s est triangulaire supérieure avec une diagonale de 1. On voit que $\det s = 1$ et on en déduit que s est bijectif.

L'endomorphisme s n'est pas diagonalisable car (par l'absurde), n'ayant que la valeur propre 1, il serait alors égal à $\text{id}_{\mathbb{R}_n[X]}$; or $s(X^2) = X^2 + \frac{1}{3} \neq X^2$.

AUTRE MÉTHODE : Comme s est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ qui est de dimension finie, son injectivité donnera sa bijectivité. Or si $f \in \text{Ker } s$, alors : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x+1) - f(x-1) = 0$ et le polynôme $P = f - f(0)$ admet une infinité de racines, les réels $2n, n \in \mathbb{N}$. Ce polynôme est donc nul, donc f est constant et $s(f) = 0$ donne alors $f = 0$.

5. RMS 2006 1043 CCP PSI

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $f, g \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $\text{Im } f + \text{Ker } g = E \iff \text{Im}(g \circ f) = \text{Im } g$.

SOLUTION — On suppose que $\text{Im } f + \text{Ker } g = E$. L'inclusion $\text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im } g$ étant toujours vraie, il suffit de démontrer que $\text{Im } g \subset \text{Im}(g \circ f)$. Soit $y \in \text{Im } g$. Il existe $x \in E$ tel que $y = g(x)$. Par hypothèse, il existe $(x_1, x_2) \in \text{Im } f + \text{Ker } g$ tel que $x = x_1 + x_2$ et, comme $x_1 \in \text{Im } f$, il existe $x_3 \in E$ tel que $x_1 = f(x_3)$. Alors $y = g(x) = g(f(x_3) + x_2) = g(f(x_3))$, puisque $x_2 \in \text{Ker } g$, ce qui prouve que $y \in \text{Im}(g \circ f)$.

Réciproquement, on suppose que $\text{Im}(g \circ f) = \text{Im } g$. Soit $x \in E$. Alors $g(x) \in \text{Im}(g \circ f)$ par hypothèse, donc il existe $y \in E$ tel que $g(x) = g(f(y))$, ou encore $g(x - f(y)) = 0$. On vient de montrer que $z := x - f(y) \in \text{Ker } g$, et l'égalité $x = f(y) + z$ prouve que $\text{Im } f + \text{Ker } g = E$.

6. RMS 2014 639 Mines Ponts PSI

Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie et soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $f^2 = 0$ si, et seulement si, il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ g = f$ et $g \circ f = 0$.

SOLUTION — On remarque classiquement que $f^2 = 0 \iff \text{Im } f \subset \text{Ker } f$.

- Dans le sens \Leftarrow : $f^2 = f \circ (g \circ f) \circ g = 0$.
- Dans l'autre sens : soit G un supplémentaire de $\text{Ker } f$ et g la projection sur G parallèlement à $\text{Ker } f$. Tout vecteur $x \in E$ s'écrit $x_0 + x_1$, avec $(x_0, x_1) \in \text{Ker } f \times G$. Alors $f(x) = f(x_0 + x_1) = f(x_1) = f(g(x))$ et comme $f(x) \in \text{Im } f \subset \text{Ker } f = \text{Ker } g, g(f(x)) = 0_E$.

7. RMS 2016 324 X ESPCI PC

Mots-clés : caractérisation des matrices non inversibles

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\det A = 0$ si et seulement si il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle telle que $AB = BA = 0$.

SOLUTION — Notons f l'endomorphisme canoniquement associé à A .

- La condition est suffisante (en fait $AB = 0$ suffit). En effet s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle telle que $AB = 0$, alors (en notant g l'endomorphisme de \mathbb{R}^n canoniquement associé à B) $\{0_{\mathbb{R}^n}\} \neq \text{Im } g \subset \text{Ker } f$ donc $\text{Ker } f \neq \{0\}$. Cela implique que f n'est pas bijective et que $\det A = \det f = 0$.
- Réciproquement, supposons que $\det A = 0$. Si $A = 0$ alors toute matrice non nulle B convient.

Supposons maintenant que A est non nulle et non inversible. Les sous-espaces $\text{Im } f$ et $\text{Ker } f$ sont tous deux distincts de $\{0_{\mathbb{R}^n}\}$ et de \mathbb{R}^n . Soit (e_1, \dots, e_r) une base de $\text{Im } f$, que l'on complète en une base $e = (e_1, \dots, e_n)$ de \mathbb{R}^n . Soit ensuite e'_1 un vecteur non nul de $\text{Ker } f$. Un tel vecteur existe bien puisque $\text{Ker } f \neq \{0_{\mathbb{R}^n}\}$. Soit enfin g l'endomorphisme de \mathbb{R}^n défini sur la base e par :

$$\begin{cases} (1) & \forall i \in \{1, \dots, r\}, \quad g(e_i) = 0_{\mathbb{R}^n} \\ (2) & \forall i \in \{r+1, \dots, n\}, \quad g(e_i) = e'_1 \end{cases}$$

L'application g n'est pas nulle puisque $g(e_n) = e'_1 \neq 0_{\mathbb{R}^n}$, les formules (1) donnent $\text{Im } f \subset \text{Ker } g$ donc $g \circ f = 0$ et les formules (2) donnent $\text{Im } g = \text{Vect}(e'_1) \subset \text{Ker } f$ donc $f \circ g = 0$. Si on note B la matrice de g dans la base canonique de \mathbb{R}^n , on a donc :

$$B \neq 0 \quad \text{et} \quad BA = AB = 0.$$

8. RMS 2024 303 X MP MPI

Soient p un projecteur et u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie tels que $p \circ u + u \circ p = u$. Montrer que $\text{tr}(u) = 0$.

SOLUTION — De la relation $p \circ u + u \circ p = u$, on déduit que $\text{tr}(u) = 2 \text{tr}(u \circ p)$. En composant avec p , la relation donne : $u \circ p = p \circ u \circ p + u \circ p^2 = p \circ u \circ p + u \circ p$ car p est un projecteur. D'où $p \circ u \circ p = 0$ et, par suite, $0 = \text{tr}(p \circ u \circ p) = \text{tr}(u \circ p^2) = \text{tr}(u \circ p)$. Donc $\text{tr}(u) = 0$.

9. RMS 2024 930 Mines Ponts PSI

Soient un espace vectoriel E , un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ et un sous-espace vectoriel F stable par u . On suppose que u est nilpotent et que $E = F + \text{Im}(u)$. Montrer que $E = F$.

SOLUTION — Soit un vecteur $x_0 \in E$. De la relation $E = F + \text{Im}(u)$, on tire l'existence de $(x_1, y_0) \in E \times F$ tel que $x_0 = u(x_1) + y_0$. De même, il existe $(x_2, y_1) \in E \times F$ tel que $x_1 = u(x_2) + y_1$ et, par récurrence : pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe $(x_{p+1}, y_p) \in E \times F$ tel que $x_p = u(x_{p+1}) + y_p$. Toujours par récurrence, $x_0 = y_0 + u(y_1) + u^2(y_2) + \dots + u^{p-1}(y_{p-1}) + u^p(x_p)$ pour tout p . En particulier, on peut choisir p tel que $u^p = 0$ car l'endomorphisme u est nilpotent. Alors $x_0 = y_0 + u(y_1) + u^2(y_2) + \dots + u^{p-1}(y_{p-1})$ est une somme de vecteurs de F car les vecteurs y_k appartiennent à F par construction et le *sev* F est stable par u . D'où $E \subset F$, donc $E = F$.

10. UPS 20240331

Mots-clés : commutant d'une matrice

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, \mathcal{M}_n l'espace vectoriel des matrices carrées à coefficients complexes et \mathcal{T}_n le sous-espace vectoriel des matrices triangulaires supérieures. Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n$, on pose f_A l'endomorphisme défini sur \mathcal{M}_n par $f_A(M) = AM - MA$.

- (a) On suppose que $A \in \mathcal{T}_n$. Montrer que, pour toute matrice $M \in \mathcal{T}_n$, la matrice $f_A(M)$ est triangulaire supérieure stricte. En déduire que $\dim(\mathcal{T}_n \cap \text{Ker } f_A) \geq n$.
- (b) Soit une matrice quelconque $A \in \mathcal{M}_n$. Montrer que $\dim(\text{Ker } f_A) \geq n$.

SOLUTION —

- (a) Soit M une matrice triangulaire supérieure : pour tout $j > i$, $m_{ij} = 0$ et $a_{ij} = 0$. Soit $N = f_A(M) = AM - MA$: on vérifie que $n_{ij} = \sum_{k=1}^n (a_{ik}m_{kj} - m_{ik}a_{kj})$ est nul si $j > i$ ou $j = i$.

De ce que $f_A(M)$ est triangulaire, on tire que le *sev* \mathcal{T}_n est stable par f_A . On peut donc poser g l'endomorphisme induit par f_A sur \mathcal{T}_n et lui appliquer le théorème du rang : $\dim \text{Im } g + \dim \text{Ker } g = \dim \mathcal{T}_n$.

Or $\text{Ker } g = \mathcal{T}_n \cap \text{Ker } f_A$, $\dim \mathcal{T}_n = \frac{n^2+n}{2}$ et $\text{Im } g$ est un *sev* de l'*ev* des matrices triangulaires strictes. Ce dernier ayant pour dimension $\frac{n^2-n}{2}$, $\dim \text{Im } g \leq \frac{n^2-n}{2}$.

Finalement, $\dim(\mathcal{T}_n \cap \text{Ker } f_A) = \dim \mathcal{T}_n - \dim \text{Im } g \geq \frac{n^2+n}{2} - \frac{n^2-n}{2} \geq n$.

- (b) On se ramène au cas d'une matrice triangulaire. La matrice A est trigonalisable car à coefficients complexes : il existe donc $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}AP = T$. Or $M \in \text{Ker } f_A \iff P^{-1}MP \in \text{Ker } f_T$. Ces deux noyaux ont donc même dimension car $M \mapsto P^{-1}MP$ est un isomorphisme.

Or, d'après la première question, $\dim(\mathcal{T}_n \cap \text{Ker } f_T) \geq n$. Et, par inclusion, $\dim \text{Ker } f_T \geq \dim(\mathcal{T}_n \cap \text{Ker } f_T)$. Donc $\dim(\text{Ker } f_A) = \dim(\text{Ker } f_T) \geq n$.

11. B2 Centrale

Mots-clés : commutant d'une matrice

Soient $n \geq 2$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

- (a) Soient $D = \text{diag}(1, 2, \dots, n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $M \mapsto MD - DM$. Montrer que $\text{Im}(\varphi)$ est l'ensemble \mathcal{N}_n des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ à coefficients diagonaux tous nuls.
- (b) Soit u un endomorphisme d'un \mathbb{K} -*ev* E de dimension n tel que, pour tout $x \in E$, $u(x)$ est colinéaire à x . Montrer que u est une homothétie.
- (c) Montrer que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont la trace est nulle est semblable à une matrice de \mathcal{N}_n .
- (d) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $\text{tr}(A) = 0$ si, et seulement si, il existe $(U, V) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ tel que $A = UV - VU$.

SOLUTION —

- (a) Pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, les éléments diagonaux de la matrice $\varphi(M)$ sont tous nuls, donc $\text{Im}(\varphi) \subset \mathcal{N}_n$. Pour prouver l'égalité, il suffit de montrer l'égalité des dimensions des *sev* $\text{Im}(\varphi)$ et \mathcal{N}_n .

D'une part, la famille $(E_{ij})_{i \neq j}$ est une base du *sev* \mathcal{N}_n , qui est donc de dimension $n^2 - n$. D'autre part, $M \in \text{Ker}(\varphi) \iff MD = DM \iff \forall (i, j), im_{ij} = jm_{ij} \iff \forall i \neq j, m_{ij} = 0$. D'où $\dim \text{Ker}(\varphi) = n$ et, par le théorème du rang, $\dim \text{Im}(\varphi) = n^2 - n$.

- (b) Soit $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de E . Par hypothèse, pour chaque $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, il existe $\alpha_{e_i} \in \mathbb{K}$ tel que $u(e_i) = \alpha_{e_i}e_i$. De même, pour tout $i \neq j$, il existe $\alpha_{e_i+e_j} \in \mathbb{K}$ tel que $u(e_i + e_j) = \alpha_{e_i+e_j}(e_i + e_j)$. De $u(e_i) + u(e_j) = u(e_i + e_j)$, on déduit que $(\alpha_{e_i+e_j} - \alpha_{e_i})e_i + (\alpha_{e_i+e_j} - \alpha_{e_j})e_j = 0_E$. D'où $\alpha_{e_i+e_j} - \alpha_{e_i} = \alpha_{e_i+e_j} - \alpha_{e_j} = 0_{\mathbb{K}}$ car la famille (e_i, e_j) est libre. D'où $\alpha_{e_i} = \alpha_{e_j}$. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \alpha_{e_i} = \lambda$. Donc $u(x) = \lambda x$ pour tout $x \in E$ par linéarité.
- (c) La propriété est vérifiée si $n = 1$. On la prouve ensuite par récurrence, en la supposant vraie à un rang n . Soit $A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$ représentant un endomorphisme u dans une base \mathcal{B} d'un *ev* E : ou bien A représente une homothétie, alors $\exists \lambda \in \mathbb{K}, A = \lambda I_{n+1}$ et la propriété est vraie. Ou bien il existe $x \in E$ tel que la famille $(x, u(x))$ est libre, ce qui permet de la compléter en une base $\mathcal{B}' = (x, u(x), e_3, \dots, e_n)$ de E dans laquelle l'endomorphisme u est représenté

par une matrice semblable A' semblable à A , de la forme $\begin{pmatrix} 0 & B \\ C & D \end{pmatrix}$ où le bloc C est la colonne $(1\ 0 \cdots 0)^T$. Le bloc $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est de trace nulle car $0 = \text{tr}(A) = \text{tr}(A') = \text{tr}(D)$, on peut donc lui appliquer l'hypothèse de récurrence : $\exists P \in GL_n(\mathbb{K}), P^{-1}DP \in \mathcal{N}_n$. D'où $A' = \begin{pmatrix} 0 & B \\ C & PNP^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & BP \\ P^{-1}C & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{pmatrix}$ est semblable à une matrice de \mathcal{N}_{n+1} , et donc A aussi, ce qui achève la récurrence.

- (d) Si $A = UV - VU$, alors $\text{tr}(A) = 0$ car $\text{tr}(UV) = \text{tr}(VU)$. Réciproquement : si $\text{tr}(A) = 0$, alors A est semblable à une matrice de \mathcal{N}_n d'après c/ qui est de la forme $MD - DM$ d'après a/. Il existe donc $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $A = P(MD - DM)P^{-1} = UV - VU$ en notant $U = PMP^{-1}$ et $V = PDP^{-1}$.

12. RMS 2025 535 Mines-Ponts MP-MPI

Soient $n \geq 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice non nulle et non inversible. Montrer que :

- (a) il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\text{Im}(A^p)$ et $\text{Ker}(A^p)$ sont supplémentaires ;
 (b) il existe $r \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $B \in GL_r(\mathbb{C})$ et $N \in \mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{C})$ nilpotente tels que A est semblable à $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix}$.

SOLUTION —

- (a) \triangleright **exercice 12 du TD 2**

- (b) La matrice A représente un endo f dans une base d'un \mathbb{C} -ev E de dimension n . La somme directe $\text{Im}(f^p) \oplus \text{Ker}(f^p) = E$ de la question précédente est adaptée. Les *sev* $\text{Im}(f^p)$ et $\text{Ker}(f^p)$ sont stables f car les endo f et f^p commutent.

D'une part, l'endomorphisme $g : \text{Im}(f^p) \rightarrow \text{Im}(f^p)$, $x \mapsto f(x)$ induit par f sur le *sev* stable $\text{Im}(f^p)$ est bijectif car il est injectif. En effet, soit $x \in \text{Ker}(g)$. Alors $g(x) = 0_E$, d'où $f^p(x) = 0_E$, d'où $x \in \text{Ker}(f^p)$. Or x appartient aussi à $\text{Im}(f^p)$ par construction. Et ces deux *sev* sont en somme directe d'après la question précédente, donc $x = 0_E$.

D'autre part, l'endomorphisme $h : \text{Ker}(f^p) \rightarrow \text{Ker}(f^p)$, $x \mapsto f(x)$ induit par f sur le *sev* stable $\text{Ker}(f^p)$ est nilpotent car $f^p(x) = 0_E$ car $x \in \text{Ker}(f^p)$ par construction.

En concaténant une base \mathcal{B}_1 de $\text{Im}(f^p)$ et une base \mathcal{B}_2 de $\text{Ker}(f^p)$, on obtient une base de E d'après la question précédente. Dans cette base, la matrice $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix}$ de l'endo f est diagonale par blocs, B est inversible car c'est la matrice de g dans la base \mathcal{B}_1 et N est nilpotente car c'est la matrice de h dans la base \mathcal{B}_2 .

13. RMS 2026 983 Mines-Ponts PC

Soit $(A, B, C) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^3$. Montrer que :

- (a) $\text{rg}(AB) = \text{rg}(B) - \dim(\text{Ker}(A) \cap \text{Im}(B))$;
 (b) $\text{rg}(ABC) + \text{rg}(B) \geq \text{rg}(AB) + \text{rg}(BC)$.

SOLUTION —

- (a) On note a, b, c les endomorphismes représentés, dans une base d'un \mathbb{R} -ev de dimension 3 par les matrices respectives A, B, C . En appliquant le théorème du rang à l'application linéaire restreinte $a|_{\text{Im}(b)}$, on obtient :

$$\text{rg}(AB) + \dim(\text{Ker}(a) \cap \text{Im}(b)) = \text{rg}(B) \quad \text{id est} \quad \text{rg}(AB) = \text{rg}(B) - \dim(\text{Ker}(a) \cap \text{Im}(b)).$$

- (b) Par le même raisonnement, on obtient : $\text{rg}(ABC) = \text{rg}(BC) - \dim(\text{Ker}(a) \cap \text{Im}(b \circ c))$. Par ailleurs, $\text{Im}(b \circ c) \subset \text{Im}(b)$, d'où $\text{Ker}(a) \cap \text{Im}(b \circ c) \subset \text{Ker}(a) \cap \text{Im}(b)$, donc $\dim \text{Ker}(a) \cap \text{Im}(b \circ c) \leq \dim \text{Ker}(a) \cap \text{Im}(b)$. Ainsi :

$$\begin{aligned} \text{rg}(ABC) + \text{rg}(B) &= \text{rg}(BC) - \dim(\text{Ker}(a) \cap \text{Im}(b \circ c)) + \text{rg}(B) \\ &\geq \text{rg}(BC) - \dim(\text{Ker}(a) \cap \text{Im}(b)) + \text{rg}(B) = \text{rg}(AB) + \text{rg}(BC). \end{aligned}$$

14. RMS 2026 990 Mines-Ponts PC

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $\det(A) = \det(B) = \det(A+B) = \det(A-B) = 0$.

En étudiant la fonction $s \mapsto \det(A+sB)$, déterminer $\det(xA+yB)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

SOLUTION — Soit, pour tout $s \in \mathbb{R}$, $P(s) = \det(A+sB) = \sum_{\sigma \in S_3} \epsilon(\sigma) \prod_{i=1}^3 (a_{\sigma(i),i} + sb_{\sigma(i),i})$.

P est un polynôme à coefficients réels de degré au plus 3 et son coefficient dominant est $\det(B) = 0$. D'où $\deg P \leq 2$. De plus, P admettant par hypothèse trois racines qui sont 0, -1 et 1, c'est le polynôme nul. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Si $x = 0$, alors $\det(xA+yB) = y^3 \det(B) = 0$. Sinon, $\det(xA+yB) = x^3 \det(A + \frac{y}{x}B) = x^3 P(\frac{y}{x}) = 0$.

15. RMS 2026 274 X MP

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension $n \geq 2$.

Soient u et v dans $\mathcal{L}(E)$. On suppose que $c = u \circ v - v \circ u$ est de rang 1.

- (a) Montrer que $c^2 = 0$ et qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de c est égale à $E_{n-1,n}$.
 (b) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u^k(\text{Im } c) \subset \text{Ker } c$.

SOLUTION —

- (a) Comme c est de rang 1, $c^2 = \text{tr}(c)c$.

Comme $c^2 = 0$, $\text{Im } u \subset \text{Ker } u$. Si on choisit $e_n \in E \setminus \text{Ker}(u)$, alors $e_{n-1} = u(e_n)$ engendre $\text{Im } u$ et est dans le noyau. On peut donc compléter (e_{n-1}) en (e_1, \dots, e_{n-1}) base de l'hyperplan $\text{Ker}(u)$. Ainsi $e = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E . Dans cette base, c a pour matrice $E_{n-1,n}$.

- (b) L'endomorphisme $u^k \circ c$ est de rang inférieur à 1. S'il est nul, alors le résultat est acquis. On le suppose désormais de rang 1.

En outre $\text{tr}(u^k \circ c) = \text{tr}(u^{k+1}v) - \text{tr}(u^k v u) = 0$, par propriété de la trace. On peut donc appliquer la question précédente à $u^k \circ v$ et on en déduit que $\text{Im}(u^k \circ c) \subset \text{Ker}(u^k \circ c)$. Or $\text{Ker}(c) \subset \text{Ker}(u^k \circ c)$ et les deux *sev* ont pour dimension $n - 1$, d'où l'égalité des deux *sev* et $u^k(\text{Im } c) = \text{Im}(u^k \circ c) \subset \text{Ker } c$.

1.2 Réduction

16. RMS 132 1003 Centrale PSI 2021

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que toute matrice non nulle de F soit inversible.

- (a) Ici $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Montrer que, si les matrices A et B sont inversibles, alors il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $\alpha A - B$ n'est pas inversible. Qu'en déduire sur la dimension de F ?
 (b) Ici $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Examiner le cas où n est impair. Donner un exemple où la dimension de F est 2. Montrer que, si n est pair, alors $\dim F \leq n$.

SOLUTION —

- (a) La matrice $A^{-1}B$ possède au moins une valeur propre α car $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Alors la matrice $\alpha I_n - A^{-1}B$ n'est pas inversible et la matrice $\alpha A - B = A(\alpha I_n - A^{-1}B)$ ne l'est donc pas non plus. Donc $\dim F \leq 1$.
 (b) • Si n est impair, alors le polynôme caractéristique de $A^{-1}B$ est de degré impair et possède donc au moins une racine réelle α . On peut reconduire le raisonnement de la question précédente et conclure que $\dim F \leq 1$.
 • Si $n = 2$, alors l'ensemble F des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ est un sous-espace vectoriel de dimension 2 de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si $(a, b) = (0, 0)$, alors la matrice est nulle. Sinon, elle est inversible car son déterminant est $a^2 + b^2 \neq 0$.
 • Si n est pair : soit $p \in \mathbb{N}^*$. Si (A_1, \dots, A_p) est une famille libre de matrices de F , alors, pour tout $(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \neq (0, \dots, 0)$, la matrice $\alpha_1 A_1 + \dots + \alpha_p A_p$ n'est pas nulle. Elle est donc inversible par définition de F . Soit X un vecteur non nul de $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$. Le vecteur $(\alpha_1 A_1 + \dots + \alpha_p A_p)X$ n'est donc pas nul. Par suite, les p vecteurs $A_1 X, \dots, A_p X$ sont linéairement indépendants. D'où $p \leq n$. Donc $\dim F \leq n$.

17. RMS 2012 1319 CCP PC

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $f \circ f$ est un projecteur.

Montrer que f est diagonalisable si, et seulement si, $f^3 = f$.

SOLUTION — Comme $(f \circ f)^2 = f \circ f$, le polynôme $X^4 - X^2 = X^2(X - 1)(X + 1)$ est annulateur de f , donc le spectre de f est inclus dans $\{-1, 0, 1\}$.

Si l'endomorphisme f est diagonalisable, il existe une base \mathcal{B} de E telle que la matrice A de f sur \mathcal{B} soit

$$\text{diag}(-1, \dots, -1, 0, \dots, 0, 1, \dots, 1).$$

Comme $\lambda^3 = \lambda$ pour tout $\lambda \in \{-1, 0, 1\}$, on en déduit que $A^3 = A$, donc que $f^3 = f$.

Réciproquement, si $f^3 = f$, le polynôme $X^3 - X = X(X - 1)(X + 1)$ est annulateur de f , et comme il est scindé à racines simples, f est diagonalisable.

18. RMS 2014 903b Centrale PSI

$$\text{Soit } M = \begin{pmatrix} i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix}.$$

- (a) Déterminer le polynôme minimal de la matrice M .
 (b) Montrer qu'il n'existe pas de matrice $B \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ semblable à M .

SOLUTION —

- (a) Comme $(X - i)^2$ annule le premier bloc diagonal et $(X + i)$ annule le second, le polynôme $(X - i)^2(X + i)$ annule la matrice M , donc le polynôme minimal π_M divise $(X - i)^2(X + i)$. Or aucun des polynômes $X - i$, $X + i$, $(X - i)^2$ et $(X - i)(X + i) = X^2 + 1$ n'annule M , donc $\pi_M = (X - i)^2(X + i)$.
- (b) Supposons $B \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ semblable à M . Alors B et M ont les mêmes polynômes annulateurs. En particulier, $\pi_M = (X - i)^2(X + i) = X^3 - iX^2 + X - i$ annule B , donc $B^3 - iB^2 + B - iI_4 = B(B^2 + I_4) - i(B^2 + I_4) = (0)$, et donc $B^2 + I_4 = (0)$ en séparant parties réelle et imaginaire, i.e. $X^2 + 1$ annule B . Or $X^2 + 1$ n'annule pas M , d'où une contradiction.

19. A1 CCP MP 2018

Soit une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $M^2 + M^T - I_n = 0$.

- (a) Montrer que la matrice M est diagonalisable.
 (b) Montrer que M est inversible si, et seulement si, 1 n'est pas une valeur propre de M .

SOLUTION —

- (a) De $M^2 + M^T - I_n = 0$, on déduit :
 — en élevant $M^T = I_n - M^2$ au carré que $(M^T)^2 = I_n - 2M^2 + M^4$;
 — en transposant que $(M^T)^2 = I_n - M$.
 En comparant, il vient que $M^4 - 2M^2 + M = 0$. Le polynôme $P = X^4 - 2X^2 + X = X(X - 1)(X^2 + X - 1) = X(X - 1)(X - \frac{-1+\sqrt{5}}{2})(X - \frac{-1-\sqrt{5}}{2})$ est donc annulateur de la matrice M . Or ce polynôme P est scindé à racines simples, donc la matrice M est diagonalisable.
- (b) Le spectre de M est inclus dans l'ensemble $\{0; 1; \frac{-1+\sqrt{5}}{2}; \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\}$ des racines du polynôme annulateur P . La trace de la matrice M nous renseigne aussi sur ses valeurs propres. De $M^2 + M^T - I_n = 0$, on déduit que $\text{Tr}(M^2) + \text{Tr}(M^T) - \text{Tr}(I_n) = 0$ par linéarité de la trace. De plus, $\text{Tr}(M^T) = \text{Tr}(M)$, d'où $\text{Tr}(M^2) + \text{Tr}(M) - \text{Tr}(I_n) = 0$, donc $\text{Tr}(M^2 + M - I_n) = 0$.

Or la matrice M est diagonalisable et la trace est un invariant de similitude, d'où :

$$0 = \sum_{i=1}^n (\lambda_i^2 + \lambda_i - 1) = d_0 \times (0^2 + 0 - 1) + d_1 \times (1^2 + 1 - 1)$$

car $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ sont des racines de $\lambda^2 + \lambda - 1$. On en déduit que les dimensions d_0 de $SEP(0)$ et d_1 de $SEP(1)$ sont égales.

Enfin, une matrice est inversible ssi 0 n'appartient pas à son spectre. Donc M est inversible ssi $d_0 = 0$ ssi $d_1 = 0$.

20. RMS 2011 1128 CCP PC

- (a) On définit $\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ par : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \varphi(M) = 2M + {}^tM$. Déterminer un polynôme annulateur de φ . Montrer que l'endomorphisme φ est diagonalisable. Déterminer ses valeurs propres et ses sous-espaces propres.
 (b) Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $\varphi_{a,b} : M \mapsto aM + b{}^tM$. Montrer que $\varphi_{a,b}$ est inversible si, et seulement si, $a^2 \neq b^2$.

SOLUTION —

- (a) Pour toute $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $\varphi^2(M) = 2(2M + {}^tM) + {}^t(2M + {}^tM) = 5M + 4{}^tM = 4(2M + {}^tM) - 3M = 4\varphi(M) - 3M$, donc $\varphi^2 = 4\varphi - 3\text{id}$.

Le polynôme $X^2 - 4X + 3 = (X - 1)(X - 3)$ est un polynôme annulateur scindé à racines simples de φ , donc ce dernier est diagonalisable. Les valeurs propres de φ sont parmi les racines de tout polynôme annulateur : $\text{Sp}(\varphi) \subset \{1, 3\}$ (en fait, comme φ n'est manifestement ni l'identité, ni 3 fois l'identité, on est certain que $\text{Sp}(\varphi) = \{1, 3\}$, ce que l'on vérifie ci-après). L'égalité $\varphi(M) = M$ est équivalente à $M + {}^tM = 0$, et l'égalité $\varphi(M) = 3M$ est équivalente à $M = {}^tM$, donc

$$\begin{aligned} E_1(\varphi) &= \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \\ E_3(\varphi) &= \mathcal{S}_n(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

- (b) Comme φ est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, son inversibilité équivaut à son injectivité. On examine donc le noyau de φ . Le système obtenu ci-dessous vient de la décomposition d'une matrice carrée A en somme d'une matrice symétrique $\frac{1}{2}(A + {}^tA)$ et d'une matrice antisymétrique $\frac{1}{2}(A - {}^tA)$, propriété qu'on applique à $\varphi(M)$:

$$\varphi(M) = 0 \iff aM + b{}^tM = 0 \iff \begin{cases} (a+b)(M + {}^tM) = 0 \\ (a-b)(M - {}^tM) = 0. \end{cases}$$

La condition est nécessaire : on raisonne par contraposition. Si $a^2 = b^2$, on a, par exemple, $a = b$, et le système ci-dessus équivaut à $(a + b)(M + {}^tM) = 0$, donc $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \subset \text{Ker } \varphi$, donc φ n'est pas injectif donc pas inversible (on raisonne de même si $a = -b$).

La condition est suffisante. Si $a^2 \neq b^2$, alors $a + b$ et $a - b$ sont non nuls, et, si $M \in \text{Ker } \varphi$, alors $M = {}^tM = -{}^tM$, donc $M = 0$: le noyau de φ est réduit à $\{0\}$, donc φ est inversible.

21. RMS 2016 757 Centrale PSI

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et f, g des endomorphismes de E tels que $f^2 = g^2 = \text{id}_E$ et $f \circ g + g \circ f = 0$.

(a) Montrer que la dimension de E est paire.

(b) Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle les matrices de f et g sont $\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -I_n \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$.

SOLUTION —

(a) L'endomorphisme f est une symétrie, d'où $E = E_1(f) \oplus E_{-1}(f)$ est la somme directe des deux sous-espaces vectoriels $E_1(f) = \text{Ker}(1 \text{id}_E - f)$ et $E_{-1}(f) = \text{Ker}(-1 \text{id}_E - f)$.

Pour tout $x \in E_1(f)$, on a $f(x) = 1x$ et, parce que f et g anticommulent, $0_E = f \circ g(x) + g \circ f(x) = f \circ g(x) + g(x)$, d'où $f(g(x)) = -g(x)$. D'où $g(x) \in E_{-1}(f)$, donc $g(E_1(f)) \subset E_{-1}(f)$ et, par suite, $\dim g(E_1(f)) \leq \dim E_{-1}(f)$. Or g est bijective (car $g^2 = \text{id}_E$ parce que g est une symétrie), d'où $\dim g(E_1(f)) = \dim E_1(f)$. On en déduit que $\dim(E_{-1}(f)) \geq \dim(E_1(f))$.

De même pour $x \in E_{-1}(f)$ on a $f \circ g(x) - g(x) = 0$ donc $g(E_{-1}(f)) \subset E_1(f)$, et l'on conclut $\dim(E_{-1}(f)) \leq \dim(E_1(f))$. D'où l'égalité des dimensions des deux sous-espaces vectoriels $E_1(f)$ et $E_{-1}(f)$, et comme ces deux sous-espaces sont supplémentaires, il vient que $\dim(E) = \dim(E_{-1}(f)) + \dim(E_1(f))$ est paire.

De plus, g induit un isomorphisme de $E_1(f)$ sur $E_{-1}(f)$ (resp. de $E_{-1}(f)$ sur $E_1(f)$).

(b) Soit $n = \dim(E_1(f)) = \dim(E_{-1}(f))$. On fixe une base (e_1, \dots, e_n) de $E_1(f)$. Comme g induit un isomorphisme de $E_1(f)$ sur $E_{-1}(f)$, les vecteurs $e_{n+1} = g(e_1), \dots, e_{2n} = g(e_n)$ forment une base de $E_{-1}(f)$.

Dans la base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_{2n})$, la matrice de f est alors par construction

$$\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -I_n \end{pmatrix}.$$

Les égalités $e_{n+1} = g(e_1), \dots, e_{2n} = g(e_n)$ donnent $g(e_{n+1}) = g^2(e_1) = e_1, \dots, g(e_{2n}) = g^2(e_n) = e_n$ car $g^2 = \text{id}_E$, donc la matrice de g dans \mathcal{B} est

$$\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

22. RMS 2016 472 Mines Ponts PSI

Mots-clés : racine carrée de la dérivation

On note E l'espace $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

(a) Soient E_1 le sous-espace vectoriel engendré par les fonctions sinus et cosinus et $\phi_1: f \in E_1 \mapsto f' \in E_1$. Montrer qu'il existe un endomorphisme u de E_1 tel que $u \circ u = \phi_1$.

(b) Soit $\phi: f \in E \mapsto f' \in E$. Quel est le spectre de ϕ ? Existe-t-il un endomorphisme v de E tel que $v \circ v = \phi$?

SOLUTION —

(a) Le sous-espace E_1 est stable par ϕ et en notant $\mathcal{B} = (\sin, \cos)$, on a

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\phi_1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

matrice de la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ qui est le carré de la rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$. L'endomorphisme u tel que

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

convient.

(b) Tout $\lambda \in \mathbb{R}$ est valeur propre de ϕ et le sous-espace propre associé est la droite D_λ dirigée par $e_\lambda: x \mapsto e^{\lambda x}$.

Supposons qu'un tel v existe. Alors $v \circ \phi = v \circ v^2 = v^2 \circ v = \phi \circ v$ donc D_λ est stable par v . Or D_λ est une droite, d'où e_λ est un vecteur propre de v , associé à une valeur propre μ réelle. On a alors $\phi(e_\lambda) = \mu^2 e_\lambda$ donc $\lambda = \mu^2$, ce qui est absurde si on prend $\lambda < 0$.

23. RMS 2013 585 Mines Ponts PSI, RMS 2013 332 X ESPCI PC, RMS 2016 905 TPE PSI

Mots-clés : valeur propre commune

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et χ_A, χ_B leurs polynômes caractéristiques respectifs.

- (a) Montrer que : si A et B ont une valeur propre commune, alors il existe U et V non nuls dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tels que $AU \stackrel{t}{=} V = U \stackrel{t}{=} VB$.
- (b) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que : si $AM = MB$, alors $\chi_B(A)M = 0$.
- (c) À quelle condition, nécessaire et suffisante, les matrices A et B ont-elles une valeur propre commune ?

SOLUTION —

- (a) Soit $\lambda \in \text{Sp}(A) \cap \text{Sp}(B) : \exists U \neq 0, AU = \lambda U$. La matrice B et sa transposée ont le même spectre, d'où : $\exists V \neq 0, \stackrel{t}{B}V = \lambda V$.
- (b) Par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$, on montre que $A^k M = MB^k$, et, par linéarité, que $P(A)M = MP(B)$ pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$. Puis on choisit $P = \chi_B$ et on utilise que $P(B) = 0$ d'après le théorème de Cayley & Hamilton.
- (c) Supposons que $\text{Sp}(A) \cap \text{Sp}(B) = \emptyset$ et que $AM = MB$. On note $\chi_B(\lambda) = (-1)^n(\lambda - \lambda_1)^{\alpha_1} \dots (\lambda - \lambda_p)^{\alpha_p}$. Comme $\chi_B(A)M = 0$, on trouve $(A - \lambda_1 I_n)^{\alpha_1} \dots (A - \lambda_p I_n)^{\alpha_p} M = 0$. Or $A - \lambda_j I_n$ est inversible car $\det(A - \lambda_j I_n) = \chi_A(\lambda_j) \neq 0$ et donc $(A - \lambda_j I_n)^{\alpha_j}$ est inversible et $\chi_B(A)$ aussi. Ainsi $M = 0$.

Donc (d'après ce qui précède et la première question) A et B ont une valeur propre commune si, et seulement si, il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ non nulle telle que $AM = MB$.

24. RMS 2014 1198 TPE PSI

- (a) Soient $d \in \mathbb{N}^*, a \in \mathbb{C}$ et $u : P \in \mathbb{C}_d[X] \mapsto (X - a)P' \in \mathbb{C}_d[X]$. Trouver les éléments propres de u .
- (b) En déduire l'ensemble des polynômes de $\mathbb{C}[X]$ divisibles par leur dérivée.

SOLUTION —

- (a) Soit λ une valeur propre et P un vecteur propre associé. On note $n = \deg P : P = \alpha_n X^n + \dots$ avec $\alpha_n \neq 0$. D'où $(X - a)P' = \lambda P \iff n\alpha_n X^n + \dots = \lambda\alpha_n X^n + \dots$ ce qui implique que $\lambda = n$. On en déduit que $\text{Sp}(u) \subset \llbracket 0, d \rrbracket$. Réciproquement, soit $n \in \llbracket 0, d \rrbracket$. On remarque que $u((X - a)^n) = n(X - a)^n$ donc $(X - a)^n$ est propre associé à la valeur propre n . Or on sait que $((X - a)^n)_{n \in \llbracket 0, d \rrbracket}$ est une base de $\mathbb{C}_d[X]$, on a donc une base constituée de vecteurs propres de u .
On en déduit que $\text{Sp}(u) = \llbracket 0, d \rrbracket$ et que $\text{Ker}(u - n \text{id}) = \text{Vect}((X - a)^n)$.
- (b) Soit P divisible par P' , $n = \deg P$. Le quotient s'écrit $Q = \frac{1}{n}(X - a)$. On utilise alors (a) avec une valeur de d supérieure à $n : u(P) = (X - a)P' = nQP' = nP$ donc $P \in \text{Ker}(u - n \text{id}) = \text{Vect}((X - a)^n)$.
Les polynômes divisibles par leur dérivée sont donc les $\lambda(X - a)^n$ où $\lambda \in \mathbb{C}, a \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$.

25. RMS 2007 934 CCP PC

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 + I_n$ ne soit pas inversible.

- (a) Montrer qu'il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $AX = iX$ et $X \neq 0$.
- (b) Montrer qu'il existe U et V dans $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ libres tels que $AU = -V$ et $AV = U$.

SOLUTION —

- (a) La matrice $A^2 + I_n$ se factorise dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sous la forme $(A - iI_n)(A + iI_n)$. Comme elle n'est pas inversible, c'est que $\det(A^2 + I_n) = \det(A - iI_n)\det(A + iI_n) = 0$. L'un des deux facteurs de ce produit est donc nul.
Si $\det(A - iI_n) = 0$, c'est que i est une valeur propre complexe de A , donc il existe un vecteur $X \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{C})$ non nul tel que $AX = iX$.
Si $\det(A + iI_n) = 0$, alors il existe de même un vecteur $Y \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{C})$ non nul tel que $AY = -iY$. D'où $A\bar{Y} = i\bar{Y}$.
- (b) On écrit le vecteur X de la question (a) sous la forme $U + iV$ avec U et V dans $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$. La relation $AX = iX$ se traduit alors par $A(U + iV) = i(U + iV)$, c'est-à-dire par

$$\begin{aligned} AU &= -V \\ AV &= U. \end{aligned}$$

Il est impossible que U ou V soit nul, sinon U et V le seraient, donc X serait nul, ce qui n'est pas le cas. Par suite, si (U, V) est une famille liée, on peut supposer sans perte de généralité que $U = kV$ avec $k \in \mathbb{R}$. De la première équation ci-dessus, on tire $AV = -V/k$, et de la seconde, $AV = kV$, d'où l'on déduit $(1 + k^2)V = 0$, donc $V = 0$ (puisque k est réel), mais on vient de voir que cela est impossible.

La famille (U, V) est donc libre.

Un exercice en rapport : RMS 2010 991 CCP PSI

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A \neq 0$ et $A^3 + A = 0$.

(a) La matrice A est-elle diagonalisable ?

(b) Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

SOLUTION —

(a) Le polynôme $X^3 + X = X(X+i)(X-i) \in \mathbb{C}[X]$ est scindé à racines simples et annulateur de A , qui est donc diagonalisable dans \mathbb{C} , mais pas dans \mathbb{R} car, par l'absurde : si c'était le cas, 0 serait son unique valeur propre, et A serait nulle.

(b) On note u l'endomorphisme canoniquement associé à A . La matrice A admet nécessairement une valeur propre réelle car sa taille est impaire, donc son polynôme caractéristique est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré impair. Cette valeur propre est parmi les racines de $X^3 + X$, polynôme annulateur de A . Par suite, zéro est valeur propre de A ; soit e_1 un vecteur propre associé. Il s'agit ensuite de montrer qu'il existe e_2 et e_3 tels que (e_1, e_2, e_3) soit une base de \mathbb{R}^3 et tels que $u(e_2) = -e_3$ et $u(e_3) = e_2$.

Analyse. Si ces vecteurs existent, alors $e_3 = -u(e_2)$, et $u^2(e_2) = -e_2$, donc $e_2 \in \text{Ker}(u^2 + \text{id})$.

Synthèse. On commence par montrer que $\text{Ker}(u^2 + \text{id})$ n'est pas réduit à $\{0\}$, c'est-à-dire que $u^2 + \text{id}$ n'est pas un isomorphisme. Si c'était le cas, comme $A^3 + A = 0$ donc $u \circ (u^2 + \text{id}) = 0$, on en déduirait que $u = 0$, ce que l'énoncé exclut. On choisit ensuite un vecteur non nul $e_2 \in \text{Ker}(u^2 + \text{id})$ et on pose $e_3 = -u(e_2)$. On montre enfin que (e_1, e_2, e_3) est une base. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\sum_{i=1}^3 \lambda_i e_i = 0$. En appliquant u , puis u^2 , et en utilisant la relation $u^2(e_2) = -u(e_3) = -e_2$, on obtient

$$(L_1) \quad -\lambda_2 e_3 - \lambda_3 e_2 = 0$$

$$(L_2) \quad -\lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = 0.$$

La combinaison $\lambda_3(L_1) + \lambda_2(L_2)$ conduit à $-(\lambda_2^2 + \lambda_3^2)e_2 = 0$, donc à $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ puisque $e_2 \neq 0$. Il reste $\lambda_1 e_1 = 0$, d'où $\lambda_1 = 0$, puisque e_1 est un vecteur propre.

26. RMS 2010 1043 Petites Mines PC

Soient un entier $n \geq 2$, un réel m et la matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où $a_{i,j} = 1$ si $(i,j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, n-1\}$ et $a_{i,n} = m$ si $1 \leq i \leq n$.

(a) On suppose que $m \neq 1 - n$. Montrer que A est diagonalisable.

(b) On suppose que $m = 1 - n$. Montrer que la matrice A est semblable à la matrice $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ dont tous les coefficients sont nuls excepté $b_{1,2} = 1$.

SOLUTION —

(a) Les colonnes de A étant proportionnelles à la première et non toutes nulles, A est de rang 1, donc zéro est valeur propre et $\dim \text{SEP}(0) = n - 1$. De plus $A \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = (n - 1 + m) \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, or $n - 1 + m \neq 0$, d'où $\lambda = n - 1 + m$ est une valeur propre non nulle. D'où $\dim \text{SEP}(0) + \dim \text{SEP}(\lambda) = n$, donc A est diagonalisable.

AUTRE MÉTHODE — On calcule $A^2 = [(n - 1) + m]A$, ce qui révèle que $P(X) = X \cdot (X - [(n - 1) + m])$ est un polynôme annulateur de A , scindé à racines simples car $(n - 1) + m \neq 0$ par hypothèse. Donc la matrice A est diagonalisable car une matrice est diagonalisable ssi elle possède un polynôme annulateur à racines simples.

(b) On note u l'endomorphisme canoniquement associé à A , et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de \mathbb{R}^n . On remarque que $\text{Im } u$ est la droite engendrée par $e'_1 = e_1 + \dots + e_n$, et que $u(e'_1) = 0$ car $n - 1 + m = 0$, donc que $\text{Im } u \subset \text{Ker } u$, qui est de dimension $n - 1$ d'après la question (a).

On pose alors $e'_2 = e_2$, de sorte que $u(e'_2) = e'_1 \neq 0$, et le théorème de la base incomplète assure que l'on peut trouver des vecteurs e'_3, \dots, e'_n pour compléter e'_1 et former une base $(e'_1, e'_3, \dots, e'_n)$ de $\text{Ker } u$. Comme $e'_2 \notin \text{Ker } u$, la famille $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_3)$ est une base de \mathbb{R}^n , et la matrice de u sur \mathcal{B}' est B , donc A est bien semblable à B .

27. RMS 2016 904 CCEM PSI

Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit M une matrice carrée dont la première ligne est $(a, 0, \dots, 0)$ la deuxième $(1, \dots, 1)$, et toutes les autres $(1, 0, \dots, 0)$. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur a pour que M soit diagonalisable.

SOLUTION — On a (le déterminant étant triangulaire par blocs)

$$M = \begin{pmatrix} a & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad \chi_M = \begin{vmatrix} X-a & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & X-1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & 0 & X & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ -1 & 0 & 0 & \dots & X \end{vmatrix} = (X-a)(X-1)X^{n-2}.$$

La matrice M est de rang 2 donc $\dim E_0(M) = n - 2$.

- Si $a \neq 0$ et $a \neq 1$: les valeurs propres a et 1 sont simples donc la dimension des espaces propres est 1 et $\dim E_0(M) = n - 2$, chaque espace propre a pour dimension la multiplicité de la valeur propre donc M est diagonalisable.
- Si $a = 0$: la valeur propre 0 est d'ordre $n - 1$ et $\dim E_0(M) = n - 2$, l'espace propre n'a pas pour dimension la multiplicité de la valeur propre donc M n'est pas diagonalisable.
- Si $a = 1$: la valeur propre 1 est d'ordre 2, mais

$$I - M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

est de rang $n - 1$ donc $\dim E_1(M) = 1$; l'espace propre n'a pas pour dimension la multiplicité de la valeur propre donc M n'est pas diagonalisable.

28. RMS 2014 1331 TPE PC

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\Phi_A : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto AM \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

- (a) Montrer que Φ_A est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Déterminer les $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tels que $\Phi_A = 0$.
- (b) Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $P \in \mathbb{C}[X]$, comparer $\Phi_{P(A)}$ et $P(\Phi_A)$.
- (c) Montrer que Φ_A est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable.

SOLUTION —

- (a) L'application Φ_A va de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans lui-même, et sa linéarité résulte de la bilinéarité du produit matriciel, c'est donc un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Si $\Phi_A = 0$, alors $\Phi_A(I_n) = AI_n = A = 0$. Réciproquement, il est clair que $A = 0 \implies \Phi_A = 0$.

- (b) Une récurrence donne $(\Phi_A)^k = \Phi_{A^k}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$, et on constate que $\Phi_{\lambda A + \mu B} = \lambda \Phi_A + \mu \Phi_B$ pour tous $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

En combinant les deux résultats, on obtient

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \quad \forall P \in \mathbb{C}[X], \quad \Phi_{P(A)} = P(\Phi_A).$$

- (c) Si A est diagonalisable, alors il existe un polynôme scindé à racines simples $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(A) = 0$. On déduit de la question précédente que $P(\Phi_A) = \Phi_{P(A)} = \Phi_0 = 0$, donc que Φ_A est diagonalisable.

Réciproquement, si Φ_A est diagonalisable, alors il existe un polynôme scindé à racines simples $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(\Phi_A) = 0$. On en déduit que $\Phi_{P(A)} = 0$, donc que $P(A) = 0$ en vertu de la question (a), donc que A est diagonalisable.

29. RMS 2013 970 TPE EIVP PSI

Discuter, dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, la diagonalisabilité et la trigonalisabilité en fonction du paramètre réel a de $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -a & a \end{pmatrix}$.

SOLUTION — Le polynôme caractéristique de A vaut

$$\chi_A(x) = (x-1)(x^2 - (a-1)x + 1),$$

et le discriminant de $x^2 - (a-1)x + 1$ vaut $\Delta = a^2 - 2a - 3 = (a+1)(a-3)$. On en déduit que

- Si $-1 < a < 3$, χ_A n'est pas scindé sur \mathbb{R} donc A n'est ni trigonalisable ni diagonalisable sur \mathbb{R} .
- Sinon, χ_A est scindé sur \mathbb{R} , ses valeurs propres sont 1 et λ_2, λ_3 et A est au moins trigonalisable sur \mathbb{R} .
 - si $a = -1$, alors $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$ et $A + I_3$ est de rang 2 donc $\dim \text{Ker}(A + I_3) = 1 < 2$ et A est seulement trigonalisable.

- si $a = 3$, alors $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$, d'où A n'ayant qu'une valeur propre et n'étant pas l'identité, est seulement trigonalisable.
- si $a \neq -1$ et $a \neq 3$, alors $\lambda_2 \neq \lambda_3$. Comme $\lambda_2 \lambda_3 = 1$, elles sont nécessairement distinctes de 1. A admet donc 3 valeurs propres distinctes : elle est diagonalisable.

Conclusion : si $a \in]-1, 3[$, A n'est pas trigonalisable, si $a = -1$ ou 3 , A est trigonalisable mais pas diagonalisable et si $a < -1$ ou $a > 3$, A est diagonalisable.

30. RMS 2011 1079 CCP PSI, RMS 2013 648 Mines Ponts PC, RMS 2014 1225 CCP PSI, RMS 2016 919 ENSEA PSI

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M \cdot M^T \cdot M = I_n$. Montrer que M est symétrique. Déterminer M .

SOLUTION — La relation $M^t M M = I_n$ entraîne (en transposant) que ${}^t M M {}^t M = I_n$. Or, en multipliant l'hypothèse de départ par ${}^t M$ à gauche, on obtient ${}^t M M {}^t M M = {}^t M$, donc $I_n M = M = {}^t M$, c'est-à-dire que M est symétrique réelle, donc diagonalisable sur \mathbb{R} d'après le théorème spectral.

Comme $M {}^t M M = M^3 = I_n$, le polynôme $X^3 - 1$ est annulateur de M , donc sa seule valeur propre réelle vaut 1. La matrice M est donc semblable à I_n , donc égale à I_n :

$$M = I_n.$$

31. RMS 2016 898 CCP PSI

Mots-clés : hyperplan stable

(a) Soient H un hyperplan d'un \mathbb{C} -espace vectoriel E de dimension finie, et u un endomorphisme de E .

Montrer que $u(H) \subset H \iff \exists \lambda \in \mathbb{C}, \text{Im}(u - \lambda \text{id}) \subset H$.

(b) Trouver tous les sous-espaces stables par l'endomorphisme u représenté dans une base B par

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

SOLUTION — (Réviser [▷ l'exercice 15 du TD 4](#) et voir aussi l'exercice [32.](#))

(a) $\boxed{\Rightarrow}$ Soit D une droite telle que $E = H \oplus D$ et a un vecteur directeur de D . Il existe alors $(a_H, \lambda) \in H \times \mathbb{R}$ tel que $u(a) = a_H + \lambda a$. Et, pour tout y de E , $y = y_H + \alpha a$ donc

$$(u - \lambda \text{id})(y) = u(y_H + \alpha a) - \lambda(y_H + \alpha a) = u(y_H) - \lambda y_H + \alpha(u(a) - \lambda a) = u(y_H) - \lambda y_H + \alpha a_H \in H$$

par somme de trois éléments de H , H étant stable par u .

$\boxed{\Leftarrow}$ $\forall x \in H, u(x) - \lambda x \in H$ donc $u(x) = \lambda x + x_H$ où $x_H \in H$ donc $u(x) \in H$.

- (b) • Les sous-espaces vectoriels $\{0\}$ et \mathbb{R}^3 sont stables par u (dimension 0 et 3).
 • Les espaces de dimension 1 stables par u sont les droites engendrées par des vecteurs propres ; on trouve $\chi_u = (X - 2)^3$; l'espace propre associé à la seule valeur propre 2 est de dimension 1 : c'est

$$D = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right),$$

qui est le seul sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 de dimension 1 stable par u .

- Utilisons (a) : On suppose que H est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 de dimension 2, stable par u . On cherche à obtenir

$$\text{Im}(u - \lambda \text{id}) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 3 - \lambda \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - \lambda \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 - \lambda \end{pmatrix} \right) \subset H,$$

donc la famille des trois vecteurs est liée donc le déterminant de cette famille vaut 0, donc $\chi(\lambda) = 0$ donc λ est valeur propre de A donc $\lambda = 2$. Alors

$$\text{Im}(u - 2 \text{id}) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = H,$$

par inclusion et égalité des dimensions). Par suite, H est le seul sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 de dimension 2 stable par u .

32. RMS 2015 686 Mines Ponts PC

Mots-clés : hyperplan stable

Soient $n \geq 2$, $\Phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ non nulle et $H = \text{Ker } \Phi$.

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Montrer que f stabilise H si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\Phi \circ f = \lambda \Phi$.

SOLUTION — (voir l'exercice 31.) S'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\Phi \circ f = \lambda \Phi$, considérons $x \in H$. Alors $\Phi(f(x)) = \lambda \Phi(x) = 0$, donc $f(x) \in \text{Ker } \Phi = H$, donc H est stable par f .

Réciproque. D'après le théorème du rang on a : $\dim(H) = n - 1$. Puisque Φ est non nulle, il existe $a \in \mathbb{R}^n \setminus H$ tel que $\Phi(a) = 1$. Tout vecteur x de \mathbb{R}^n s'écrit alors de façon unique sous la forme $x = \alpha a + h$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ et $h \in H$. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.

Si f stabilise H alors deux cas se présentent.

- 1er cas : $f(a) \in H$.

Soit x un vecteur de \mathbb{R}^n . Posons $x = \alpha a + h$, où $\alpha \in \mathbb{R}$ et $h \in H$. On a alors $(\Phi \circ f)(x) = \Phi(\alpha f(a) + f(h))$. Or $\alpha f(a) + f(h) \in H$, donc $(\Phi \circ f)(x) = 0$.

On a alors $\Phi \circ f = 0 \cdot \Phi = 0$ donc, dans ce cas, on a bien $\Phi \circ f = \lambda \Phi$ pour $\lambda = 0$.

- 2ème cas : $f(a) \notin H$.

Posons $\lambda = \Phi(f(a)) \neq 0$. Soit x un vecteur de \mathbb{R}^n . Posons $x = \alpha a + h$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ et $h \in H$. On a alors $(\Phi \circ f)(x) = \Phi(\alpha f(a) + f(h)) = \lambda \alpha = \lambda \Phi(x)$.

Par conséquent, dans ce cas, on a aussi $\Phi \circ f = \lambda \Phi$.

33. RMS 2024 65 ENS MP MPI

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $M = (m_{ij}) \in \mathcal{O}_{n+1}(\mathbb{R})$ la matrice d'une réflexion et $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. On pose $B = M \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$.

Montrer que $\chi_B(1) = \chi_A(0) \cdot \chi_A(1) \cdot (1 - m_{11})$.

SOLUTION — $\chi_B(1) = \det \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A^T \end{pmatrix} - M \right) \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$ car $A^T A = I_n$ par hypothèse. Le second facteur est $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} = \det A = (-1)^n \chi_A(0)$. Pour étudier le premier facteur, remarquons que la matrice $I_{n+1} - M$ est de rang 1 car $\text{Ker}(I_{n+1} - M)$ est l'ensemble des vecteurs invariants par M et est donc un hyperplan car M est la matrice d'une réflexion. Toutes les colonnes de la matrice $I_{n+1} - M$ sont donc colinéaires.

Ou bien la première colonne C_1 de $I_{n+1} - M$ est nulle et alors celle de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A^T \end{pmatrix} - M$ l'est aussi donc le déterminant de cette matrice est nul. Par ailleurs, $1 - m_{11} = 0$, ce qui rend vraie l'égalité à prouver.

Ou bien cette première colonne n'est pas nulle et alors chaque autre colonne C_j lui est colinéaire : $\exists \lambda_j \in \mathbb{R}$, $C_j = \lambda_j C_1$. Et, en retranchant $\lambda_j C_1$ à C_j , on ne change pas la valeur du déterminant :

$$\det \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A^T \end{pmatrix} - M \right) = \begin{vmatrix} 1 - m_{11} & 0 \\ * & A^T - I_n \end{vmatrix} = (1 - m_{11}) \cdot (-1)^n \det(I_n - A) = (1 - m_{11}) \cdot (-1)^n \chi_A(1).$$

1.3 Algèbre bilinéaire

34. RMS 2014 659 Mines Ponts PSI v2026

- Étudier $\inf\{\mu \in \mathbb{R}_+ \mid \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), (\text{tr } A)^2 \leq \mu \text{tr}(A^T A)\}$.
- En utilisant une inégalité arithmético-géométrique, étudier $\sup\{\mu \in \mathbb{R}_+ \mid \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mu \sqrt{\det(A^T A)} \leq \text{tr}(A^T A)\}$.

SOLUTION — (Voir aussi l'exercice 41.)

- Comme $\text{tr } A = \langle I_n, A \rangle$ (produit scalaire canonique), par l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ, $(\text{tr } A)^2 \leq \|I_n\|^2 \|A\|^2 = n \text{tr}(A^T A)$. On en déduit que la borne inférieure existe et elle vaut n car il y a égalité si $A = I_n$ (plus généralement, ssi la famille de (A, I_n) est liée).
- La matrice $A^T A$ est symétrique, d'où $\exists P \in \mathcal{O}_n$, $P^T (A^T A) P = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. De plus, chaque valeur propre λ_i est positive car $A^T A \in \mathcal{S}_n^+$. D'où $\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n \lambda_i} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \lambda_i$ d'après l'inégalité arithmético-géométrique. Or $\det(A^T A) = \prod_{i=1}^n \lambda_i$ et $\text{tr}(A^T A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$. D'où l'inégalité si $\mu = n$, qui est la borne supérieure demandée car l'inégalité est une égalité si $A = I_n$.

Un exercice en rapport : RMS 2013 652 Mines Ponts PC

Soient A et B dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $2 \text{tr}(AB) \leq \text{tr}(A^2) + \text{tr}(B^2)$.

SOLUTION — On sait que le produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ a pour expression $\langle A, B \rangle = \text{tr}({}^t A B)$. Si A et B appartiennent à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, leur produit scalaire et leur norme sont donnés par $\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB)$ et $\|A\|^2 = \text{tr}(A^2)$, $\|B\|^2 = \text{tr}(B^2)$. L'inégalité de Cauchy et Schwarz, puis l'inégalité arithmético-géométrique entraînent que

$$\text{tr}(AB) \leq |\text{tr}(AB)| = |\langle A, B \rangle| \leq \|A\| \|B\| \leq \frac{1}{2} (\|A\|^2 + \|B\|^2) = \frac{\text{tr}(A^2) + \text{tr}(B^2)}{2}.$$

35. RMS 2014 913 Centrale PSI

- (a) Montrer que l'intégrale $\int_0^1 P(t) \ln(t) dt$ converge pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$.
 (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\int_0^1 P(t) \ln(t) dt = \int_0^\pi P(t) Q(t) \sin t dt$.

SOLUTION —

- (a) $\int_0^1 \ln t dt$ converge et, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^1 t^k \ln t dt$ converge aussi car $t^k \ln t = o(\ln t)$ ($t \rightarrow 0^+$). Par linéarité, l'intégrale $\int_0^1 P(t) \ln(t) dt$ converge pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$.
 (b) On vérifie que l'application $\langle \cdot | \cdot \rangle$ définie par $\langle P | Q \rangle = \int_0^\pi P(t) Q(t) \sin t dt$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$: elle est bien symétrique et bilinéaire. Elle est aussi positive car $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\int_0^\pi P^2(t) \sin(t) dt \geq 0$ car $\forall t \in [0, \pi]$, $P^2(t) \sin(t) \geq 0$. Enfin elle est définie car

$$\begin{aligned} \int_0^\pi P^2(t) \sin(t) dt = 0 &\implies \forall t \in [0, \pi], P^2(t) \sin(t) = 0 \text{ car la fonction } t \mapsto P^2(t) \sin(t) \text{ est continue et positive} \\ &\implies \forall t \in]0, \pi[, P(t) = 0 \text{ car } \forall t \in]0, \pi[, \sin(t) \neq 0 \\ &\implies P = 0 \text{ car le polynôme } P \text{ a une infinité de racines.} \end{aligned}$$

L'application $P \mapsto \int_0^1 P(t) \ln(t) dt$ est bien définie d'après (a) et est une forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$, qui est un espace vectoriel de dimension finie. Or toute forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$ est, d'après le théorème de représentation de Riesz, de la forme $P \mapsto \langle P | Q \rangle$, pour un unique $Q \in \mathbb{R}_n[X]$, d'où le résultat.

36. RMS 2006 CCP PC, RMS 2010 1055 Télécom Sud Paris PC

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension n , p un projecteur orthogonal de rang r et (e_1, \dots, e_n) une base orthonormale de E . Montrer que $\sum_{i=1}^n \|p(e_i)\|^2 = r$.

SOLUTION —

On note $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ la matrice de p sur la base e : $\|p(e_i)\|^2 = \langle p(e_i), e_i \rangle = \langle \sum_{j=1}^n a_{i,j} e_j, e_i \rangle = a_{i,i}$ car la base e est orthonormale, donc

$$\sum_{i=1}^n \|p(e_i)\|^2 = \sum_{i=1}^n a_{i,i} = \text{tr}(A) = r,$$

car on sait que le rang d'un projecteur est égal à sa trace.

37. RMS 2011 1126 CCP PC

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien, H_1 et H_2 deux hyperplans distincts, e_1 et e_2 deux vecteurs unitaires respectivement orthogonaux à H_1 et H_2 . On pose

$$s_1 : x \mapsto x - 2\langle x, e_1 \rangle e_1 \quad \text{et} \quad s_2 : x \mapsto x - 2\langle x, e_2 \rangle e_2.$$

- (a) Vérifier que le plan $\text{Vect}(e_1, e_2)$ est stable par $s_2 \circ s_1$.
 (b) Montrer que $x \in E$ est fixe par $s_2 \circ s_1$ si et seulement si $x \in H_1 \cap H_2$.

SOLUTION — On reconnaît en s_k la symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan H_k .

- (a)

$$\begin{aligned} (s_2 \circ s_1)(e_1) &= s_2(-e_1) = -e_1 + 2\langle e_1, e_2 \rangle e_2 \\ (s_2 \circ s_1)(e_2) &= s_2(e_2 - 2\langle e_1, e_2 \rangle e_1) = -e_2 - 2\langle e_1, e_2 \rangle (e_1 - 2\langle e_1, e_2 \rangle e_2). \end{aligned}$$

On lit ci-dessus que les images par $s_2 \circ s_1$ de e_1 et e_2 appartiennent à $\text{Vect}(e_1, e_2)$ qui est donc stable par $s_2 \circ s_1$.

- (b) Sens direct. Si x est fixe par $s_2 \circ s_1$, alors $s_2(s_1(x)) = x$, donc $s_1(x) = s_2(x)$, en composant à gauche par s_2 et en utilisant l'égalité $s_2^2 = \text{id}_E$. D'où $x - 2\langle x, e_1 \rangle e_1 = x - 2\langle x, e_2 \rangle e_2$, donc

$$\langle x, e_1 \rangle e_1 = \langle x, e_2 \rangle e_2.$$

Comme H_1 et H_2 sont deux hyperplans distincts, e_1 et e_2 ne sont pas colinéaires, et on en déduit que $\langle x, e_1 \rangle = \langle x, e_2 \rangle = 0$, donc que $x \in H_1 \cap H_2$.

Sens réciproque. Si $x \in H_1 \cap H_2$, alors $s_1(x) = x$ car $x \in H_1$, puis $s_2(s_1(x)) = s_2(x) = x$, car $x \in H_2$. Finalement, x est fixe par $s_2 \circ s_1$.

38. RMS 2016 761 Centrale PSI

Soient p et q deux projections orthogonales définies sur un espace euclidien E . Soit $u = p + q$.

- (a) Soit x un vecteur de norme 1. Encadrer $\langle x | p(x) \rangle$ et $\langle x | q(x) \rangle$. En déduire que $\text{Sp}(u) \subset [0, 2]$.
- (b) Montrer que $\text{Ker}(u) = \text{Ker}(p) \cap \text{Ker}(q)$.
- (c) Déterminer $\text{Ker}(u - 2\text{id})$.

SOLUTION —

- (a) (Faire un dessin.) Pour tout $x \in E$ unitaire, $\langle x | p(x) \rangle = \|p(x)\|^2 \leq \|x\|^2$, d'où $\langle x | p(x) \rangle \in [0; 1]$ et, de même, $\langle x | q(x) \rangle \in [0; 1]$

En particulier si λ est valeur propre de u et si x est un vecteur propre unitaire associé :

$$\lambda = \langle x | u(x) \rangle = \langle x | p(x) \rangle + \langle x | q(x) \rangle \in [0; 2].$$

- (b) Si $x \in E_0(u)$, on a $0 = \langle x | u(x) \rangle = \langle x | p(x) \rangle + \langle x | q(x) \rangle$ avec $\langle x | p(x) \rangle \geq 0$ et $\langle x | q(x) \rangle \geq 0$, donc nécessairement $\langle x | p(x) \rangle = \langle x | q(x) \rangle = 0$, ce qui prouve $x \in \text{Ker}(p) \cap \text{Ker}(q)$. Réciproquement $\text{Ker}(p) \cap \text{Ker}(q) \subset \text{Ker}(u)$, d'où l'égalité.
- (c) On remplace p et q par $\text{id} - p$ et $\text{id} - q$, qui sont aussi des projections orthogonales. Donc $\text{Ker}(u - 2\text{id}) = \text{Im}(p) \cap \text{Im}(q)$.

39. RMS 2008 975 CCP PSI, RMS 2015 715 Mines Ponts PC, RMS 2015 1033, TPE PC, RMS 2016 558 Mines Ponts PC

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in O_n(\mathbb{R})$. Montrer que

$$\left| \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j} \right| \leq n = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j}^2 \leq \sum_{1 \leq i,j \leq n} |a_{i,j}| \leq n^{3/2}.$$

SOLUTION — La norme euclidienne canonique de chaque colonne de A vaut 1. En sommant sur les n colonnes de A , on obtient

$$\sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j}^2 = n$$

Soit $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ le vecteur colonne dont toutes les composantes valent 1. Si $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on constate que ${}^t U A U = \langle U, A U \rangle = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j}$. Comme A est orthogonale, elle conserve la norme donc $\|A U\| = \|U\| = \sqrt{n}$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne alors :

$$\left| \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j} \right| = |\langle U, A U \rangle| \leq \|U\| \|A U\| = \|U\|^2 = n.$$

Comme $A \in O_n(\mathbb{R})$, tous ses éléments appartiennent à $[-1, 1]$. Par suite, $a_{i,j}^2 \leq |a_{i,j}|$ pour tout (i, j) . Alors

$$n = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{i,j}^2 \right) \leq \sum_{1 \leq i,j \leq n} |a_{i,j}|.$$

Enfin, on note $S = (s_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ la matrice de signes définie par $s_{i,j} = \text{signe}(a_{i,j}) \in \{-1, 1\}$, avec un choix arbitraire si $a_{i,j} = 0$. Alors $\sum_{1 \leq i,j \leq n} |a_{i,j}| = \text{tr}({}^t A S)$. Comme on sait que $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2 \mapsto \text{tr}({}^t A B)$ est un produit scalaire, l'inégalité de Cauchy et Schwarz donne

$$\sum_{1 \leq i,j \leq n} |a_{i,j}| = \text{tr}({}^t A S) \leq \sqrt{\text{tr}({}^t A A)} \sqrt{\text{tr}({}^t S S)} = \sqrt{\text{tr}(I_n)} \sqrt{\text{tr}(nJ)} = \sqrt{n} \sqrt{n^2} = n^{3/2}.$$

40. RMS 2009 1027 Centrale PC

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien.

- (a) Soit $g \in \mathcal{L}(E)$ autoadjoint tel que $\langle g(z), z \rangle = 0$ pour tout $z \in E$. Montrer que $g = 0$.
 (b) Soit $g \in \mathcal{L}(E)$ autoadjoint tel que $\langle g(z), z \rangle = \|g(z)\|^2$ pour tout $z \in E$. Montrer que g est un projecteur.

SOLUTION —

- (a) Étant autoadjoint, g est diagonalisable : soit (e_1, \dots, e_n) une base propre de g associée à la famille de valeurs propres $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Alors $\langle g(e_i), e_i \rangle = 0 = \lambda_i \|e_i\|^2$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, donc toutes les valeurs propres de g sont nulles, donc g est l'endomorphisme nul (car g est diagonalisable et toutes ses valeurs propres sont nulles).
 (b) Soit $z \in E$. Alors $\langle (g \circ g)(z), z \rangle = \langle g(z), g(z) \rangle = \|g(z)\|^2$ car g est autoadjoint. Mais on a aussi $\langle g(z), z \rangle = \|g(z)\|^2$ par hypothèse. On en déduit que $\langle f(z), z \rangle = 0$ pour tout $z \in E$, où l'on a posé $f = g \circ g - g$. Comme g est autoadjoint, f aussi, et la question (a) affirme alors que f est nul, donc que $g \circ g = g$, c'est-à-dire que g est un projecteur.

41. RMS 2013 986 CCP PSI, RMS 2015 992 CCP PSI, RMS 2016 918 CCEM PSI v2026

- (a) Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $(\operatorname{tr} A)^2 \leq \operatorname{rg} A \cdot \operatorname{tr}(A^2)$.
 (b) Étudier $\inf\{\lambda \in \mathbb{R}_+ \mid \forall A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), |\det A| \leq \lambda \operatorname{tr}({}^t A A)\}$.

SOLUTION — (Voir aussi l'exercice 34.)

- (a) Comme A est symétrique réelle, elle est orthodiagonalisable : $\exists P \in O_n, P^T A P = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p, 0, \dots, 0)$ et $p = \operatorname{rg} A$. On en déduit que

$$\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^p \lambda_i \quad \text{et} \quad \operatorname{tr} A^2 = \sum_{i=1}^p \lambda_i^2.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz avec le produit scalaire usuel de \mathbb{R}^p appliquée aux vecteurs $X = (\lambda_1 \dots \lambda_p)^T$ et $Y = (1 \dots 1)^T$ donne le résultat voulu.

- (b) $|\det A| \leq |ad| + |bc| \leq \frac{1}{2}((a^2 + d^2) + (b^2 + c^2)) = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(A^T A)$ avec égalité si $A = I_n$ (entre autres). On en déduit que la borne inférieure existe et est égale $\frac{1}{2}$.

42. OdT 2013 19 149 TPE PSI

Mots-clés : matrice symétrique semblable à sa diagonale

Soit S symétrique réelle et D diagonale dont les coefficients sont ceux de la diagonale de S . On suppose S et D semblables. Calculer $\operatorname{tr}(S^2)$ de deux manières et en déduire que $S = D$.

SOLUTION — On note $S = (s_{i,j})$. Comme S et D sont semblables, S^2 et D^2 sont semblables et donc $\operatorname{tr}(S^2) = \operatorname{tr}(D^2) = \sum_{k=1}^n s_{k,k}^2$ car D et S ont les mêmes éléments diagonaux. Par ailleurs, S étant symétrique, $\operatorname{tr}(S^2) = \operatorname{tr}(S^T S) = \sum_{j,k} s_{j,k}^2$ (c'est la formule du produit scalaire canonique qui nous le dit). Par identification, on obtient $\sum_j \sum_{k \neq j} s_{j,k}^2 = 0$. Or $s_{j,k}^2 \geq 0$, donc pour tout $k \neq j$, $s_{j,k} = 0$, i.e. $S = D$.

43. RMS 2010 1028 TPE PSI

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Écrire la matrice dans la base canonique de la rotation d'angle π et d'axe dirigé par le vecteur (a, b, c) .

SOLUTION — (Faire un dessin.) On note u le vecteur (a, b, c) , puis D la droite engendrée par u , et P le plan orthogonal à D , et enfin r la rotation étudiée. Cette dernière est aussi appelée le demi-tour d'axe D , et c'est aussi la symétrie orthogonale par rapport à D .

Soit $x \in \mathbb{R}^3$. Comme u est unitaire, on sait que le projeté orthogonal de x sur D vaut $(u \mid x)u$ et la décomposition unique de x sur la somme directe $D \oplus P = \mathbb{R}^3$ est $x = (u \mid x)u + [x - (u \mid x)u]$. On en déduit que

$$r(x) = (u \mid x)u - [x - (u \mid x)u] = 2(u \mid x)u - x.$$

On applique cela à x valant successivement les trois vecteurs de la base canonique de \mathbb{R}^3 , ce qui donne la matrice cherchée :

$$\begin{pmatrix} 2a^2 - 1 & 2ba & 2ca \\ 2ab & 2b^2 - 1 & 2cb \\ 2ac & 2bc & 2c^2 - 1 \end{pmatrix}.$$

44. RMS 2014 180 ENS PC

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in S_n^+(\mathbb{R})$. On munit \mathbb{R}^n de sa structure euclidienne canonique et on note \mathcal{S} la sphère unité de \mathbb{R}^n . Montrer que l'application $\Phi: (t, X_0) \in \mathbb{R} \times \mathcal{S} \mapsto e^{tA} X_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ est bijective.

45. RMS 2024 314 X MP MPI

Soient p et q deux projecteurs orthogonaux dans un espace euclidien E . Montrer que :

- (a) l'endomorphisme $p \circ q \circ p$ est autoadjoint positif;
- (b) $E = \text{Im } p + \text{Ker } q + (\text{Im } q \cap \text{Ker } p)$;
- (c) l'endomorphisme $p \circ q$ est diagonalisable;
- (d) le spectre de $p \circ q$ est inclus dans $[0, 1]$.

SOLUTION —

- (a) Les projecteurs p et q sont autoadjoints (car orthogonaux), d'où $(p \circ q \circ p)^* = p^* \circ q^* \circ p^* = p \circ q \circ p$ et, pour tout vecteur $x \in E$, $\langle p \circ q \circ p(x) | x \rangle = \langle q \circ p(x) | p^*(x) \rangle = \langle q(y) | y \rangle$ en notant $y = p(x) = p^*(x)$. Or $\langle q(y) | y \rangle = \|q(y)\|_2^2$ car $y - q(y) \perp q(y)$. D'où $\langle p \circ q \circ p(x) | x \rangle \geq 0$. Donc $p \circ q \circ p \in S^+(E)$.
- (b) Pour tous sev F et G , $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$. En particulier, si $F = \text{Im } p$ et $G = \text{Ker } q$, alors $(\text{Im } p + \text{Ker } q)^\perp = \text{Ker } p \cap \text{Im } q$ car $F^\perp = \text{Ker } p$ et $G^\perp = \text{Im } q$.
- (c) Le sev $\text{Im } p$ est stable par $p \circ q$ et $\forall x \in \text{Im } p$, $p \circ q(x) = p \circ q \circ p(x)$ car $p^2 = p$. Or l'endomorphisme $p \circ q \circ p$ est diagonalisable car autoadjoint d'après la première question. Sa restriction au sev stable $\text{Im } p$ l'est donc aussi \triangleright **proposition IV.40**. Il existe ainsi une base de $\text{Im } p$ formée de vecteurs propres de $p \circ q$. D'après la deuxième question, on peut compléter cette base de $\text{Im } p$ en une base de E en y adjoignant de nouveaux vecteurs pris dans le sev $\text{Ker } q + (\text{Im } q \cap \text{Ker } p)$. Or ces nouveaux vecteurs sont tous des vecteurs propres de $p \circ q$ associés à la valeur propre 0. On obtient ainsi une base de l'ev E formée de vecteurs propres de $p \circ q$, ce qui prouve que $p \circ q$ est diagonalisable.
- (d) En répondant à la troisième question, on a constaté que les vecteurs propres de $p \circ q$ associés à des valeurs propres autres que 0 appartiennent tous au sev $\text{Im } p$ et que leurs valeurs propres sont aussi des valeurs propres de $p \circ q \circ p$. Elles sont donc positives d'après la première question. D'où $\text{Sp}(p \circ q) \subset \mathbb{R}_+$. Enfin, pour tout $x \in E$, $\|q(x)\|_2 \leq \|x\|_2$ car le projecteur q est orthogonal. De même, $\|p(q(x))\|_2 \leq \|q(x)\|_2$. Par transitivité, $\|p \circ q(x)\|_2 \leq \|x\|_2$. D'où $|\lambda| \leq 1$ pour tout $\lambda \in \text{Sp}(p \circ q)$.

46. RMS 2026 602 Mines Ponts MP MPI

- (a) Montrer que $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ est convexe.
- (b) Soient $U, V \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $R \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ tel que $U = R^2$ et en déduire $\text{tr}(UV) \geq 0$.
- (c) Soient $k \in \mathbb{N}$, I un intervalle ouvert de \mathbb{R} , $f : I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dérivable et $\alpha : t \mapsto \text{tr}(f(t)^k)$.
Montrer que : $\forall t \in I$, $\alpha'(t) = k \text{tr}(f'(t)f(t)^{k-1})$.
- (d) Soient $A, B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telles que $B - A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Montrer que : $\text{tr}(e^A) \leq \text{tr}(e^B)$. (On pourra utiliser la fonction $f : t \in [0, 1] \mapsto (1-t)A + tB = A + t(B-A)$.)

SOLUTION —

- (a) Soient $A, B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Alors, pour tout $t \in [0, 1]$, $f(t) = (1-t)A + tB = A + t(B-A) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ car $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est un sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^T f(t) X = (1-t)X^T A X + tX^T B X \geq 0$. En effet, $X^T A X \geq 0$ car $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et $1-t \geq 0$ et, de même, $X^T B X \geq 0$ et $t \geq 0$. Donc $f(t) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
- (b) Par le théorème spectral, on dispose de $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ tel que

$$U = P \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) P^T$$

avec $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres positives de U . Ainsi, en posant

$$R = P \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}) P^T,$$

R est bien symétrique positive (à spectre dans \mathbb{R}_+) et $R^2 = U$.

Alors $\text{tr}(UV) = \text{tr}(R^2V) = \text{tr}(RVR)$. La matrice RVR est symétrique positive. En effet,

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad x^T (RVR)x = (Rx)^T V (Rx) \geq 0.$$

La trace d'une matrice symétrique positive étant positive (car somme de valeurs propres positives), on peut conclure.

- (c) La trace étant linéaire et f dérivable, α est dérivable de dérivée :

$$\alpha' : t \mapsto \text{tr} \left(\sum_{j=0}^{k-1} f(t)^j f'(t) f(t)^{k-1-j} \right) = \sum_{j=0}^{k-1} \text{tr} (f'(t) f(t)^{k-1}) = k \text{tr} (f'(t) f(t)^{k-1}).$$

Par linéarité, on obtient plus généralement pour $P \in \mathbb{R}[X]$:

$$\alpha'(t) = \text{tr}(f'(t)P'(f(t)))$$

(d) Soient $A, B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telles que $B - A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. On considère

$$f : t \in [0, 1] \mapsto (1-t)A + tB = A + t(B-A) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$$

(puisque c'est une partie convexe).

On applique la question précédente avec $P_k = \sum_{j=0}^k \frac{X^j}{j!}$. Ainsi, $\alpha_k : t \mapsto \text{tr}(P_k(f(t)))$ est dérivable de dérivée

$$\alpha'_k : t \mapsto \text{tr}(f'(t)P'_k(f(t))) = \text{tr}((B-A)P'_k(f(t)))$$

Or $f(t) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et P'_k est à coefficients positifs; on en déduit que $P'_k(f(t)) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Donc, par la première question, pour tout $t \in [0, 1]$, $\alpha'_k(t) \geq 0$; ainsi

$$\text{tr}(P_k(A)) = \alpha_k(0) \leq \alpha_k(1) = \text{tr}(P_k(B)).$$

Comme la trace est continue car linéaire en dimension finie, on peut faire tendre k vers l'infini et on obtient $\text{tr}(e^A) \leq \text{tr}(e^B)$.

47. RMS 2026 448 X ESPCI PC, RMS 2016 885 ENSAM PSI

Soient $n \geq 2$ et les deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définies par

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} a_0 & a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 \\ a_1 & \ddots & \ddots & & a_2 \\ a_2 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix}.$$

- La matrice J est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$? Quel est son spectre?
- La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$? Quel est son spectre?
- Montrer que $\Sigma = \{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n a_i = 0 \text{ et } \sum_{i=1}^n a_i^2 = 1\}$ est un compact de \mathbb{R}^n .
- Montrer que la fonction $f : (a_1, \dots, a_n) \in \Sigma \mapsto a_1 a_2 + a_2 a_3 + \cdots + a_{n-1} a_n + a_n a_1$ possède un maximum, égal à $\cos \frac{2\pi}{n}$.
(On pourra commencer par déterminer le spectre de la matrice $\frac{1}{2}(J + J^T)$.)

SOLUTION —

- (Si on remarque que $J^n = I_n$, alors on peut d'emblée affirmer que la matrice J est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ car le polynôme $X^n - 1$ est annulateur, scindé à racines simples dans \mathbb{C} .) Sinon, on peut reconnaître une matrice compagnon et on effectue $L_1 \leftarrow L_1 + zL_2 + \cdots + z^{n-1}L_n$ pour calculer

$$\chi_J(z) = \begin{vmatrix} z & \cdots & \cdots & 0 & -1 \\ -1 & z & \ddots & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & z^n - 1 \\ -1 & z & \ddots & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & z \end{vmatrix} = z^n - 1$$

en développant selon L_1 .

La matrice J est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ car χ_J possède n racines distinctes deux à deux, à savoir les racines n -ièmes de l'unité : $e^{ik2\pi/n}$, avec $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

- La matrice J^k est obtenue à partir de J en décalant les deux rangées de 1 de $k-1$ crans vers le bas.

Donc $P(J) = A$ si $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_{n-1} X^{n-1}$.

Les valeurs propres de A sont les $P(\omega)$ où $\omega \in \mathbb{U}_n$ et la matrice A est diagonalisable car les vecteurs propres de J sont aussi des vecteurs propres de A , or les vecteurs propres de J forment une base.

(c) On introduit les deux fonctions g et h définies par

$$g(a_1, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^n a_i \quad \text{et} \quad h(a_1, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^n a_i^2.$$

Elles sont continues, donc les ensembles $G = g^{-1}(\{0\})$ et $H = h^{-1}(\{1\})$ sont des fermés. Donc l'ensemble $\Sigma = G \cap H$ est aussi un fermé.

(d) Si $X = (a_0, \dots, a_{n-1})$, alors $X^T J X = a_0 a_1 + \dots + a_{n-1} a_0 =: S$. Pour traiter avec une matrice symétrique, il est préférable d'écrire $S = \frac{1}{2} X^T (J + J^T) X$.

Puisque les valeurs propres de J sont les $\omega_k := e^{\frac{2ik\pi}{n}}$. Celles de $M = \frac{1}{2}(J + J^T) = \frac{1}{2}(J + J^{-1})$ sont les $c_k := \cos \frac{2k\pi}{n}$. Comme M est symétrique réelle, il existe une base orthonormée de vecteurs propres pour M . Comme $G_0 = \frac{1}{\sqrt{n}}(1, \dots, 1)^T$ est vecteur propre associé à la valeur propre simple c_0 , on peut le prendre comme premier vecteur d'une telle base (G_0, \dots, G_{n-1}) . Il s'agit de maximiser $X^T M X$ lorsque X décrit les vecteurs de norme 1 tels que $\sum_{j=0}^{n-1} x_j = 0$. Cette dernière condition équivaut à $\langle X, G_0 \rangle = 0$. Les vecteurs X concernés sont ceux qui s'écrivent

$$X = \sum_{j=1}^{n-1} y_j G_j, \quad \text{avec} \quad \sum_{j=1}^{n-1} y_j^2 = 1,$$

et alors

$$X^T M X = \sum_{j=1}^{n-1} c_j y_j^2 \leq c_1$$

avec égalité si (mais pas seulement si, puisque $c_{n-1} = c_1$) $X = G_1$. Par suite, le maximum cherché est $c_1 = \cos \frac{2\pi}{n}$.

1.4 Espaces vectoriels normés

48. RMS 2009 1031 Centrale PC

Mots-clés : continuité d'une application linéaire

Soit $E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$. Si $f \in E$, on pose $\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 f^2}$ et $\|f\|_\infty = \sup_{t \in [0, 1]} |f(t)|$. On fixe un réel α dans $[0, 1]$.

- (a) On pose $f_n : x \in [0, 1] \mapsto \frac{1}{\sqrt{1 + [n(x - \alpha)]^2}}$. Montrer que $\|f_n\|_2$ tend vers zéro.
 (b) L'application $\Phi : f \in E \mapsto f(\alpha) \in \mathbb{R}$ est-elle continue pour la norme $\|\cdot\|_2$?
 (c) Existe-t-il un réel $C > 0$ tel que $\forall f \in E, \|f\|_\infty \leq C \|f\|_2$?
 (d) Soit $n \in \mathbb{N}$. Existe-t-il $C > 0$ tel que $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \|P\|_\infty \leq C \|P\|_2$?

SOLUTION —

(a) On majore le carré de la norme grâce au changement de variable $t = n(x - \alpha)$:

$$\|f_n\|_2^2 = \int_0^1 f_n^2(x) dx = \frac{1}{n} \int_{-n\alpha}^{n(1-\alpha)} \frac{dt}{1+t^2} \leq \frac{1}{n} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{n}.$$

Par suite, $\|f_n\|_2 = \sqrt{\frac{\pi}{n}}$ tend bien vers zéro.

- (b) On montre que l'application Φ n'est pas continue pour la norme $\|\cdot\|_2$, en utilisant la suite de fonctions (f_n) : elle converge vers zéro pour la norme $\|\cdot\|_2$ mais $\Phi(f_n) = f_n(\alpha) = 1$ pour tout n et ne tend donc pas vers 0.
 (c) La réponse est non, et la même suite (f_n) fournit une preuve, puisque $\|f_n\|_\infty = 1$ et $C \|f_n\|_2 = C \sqrt{\frac{\pi}{n}}$ tend vers zéro quand n tend vers $+\infty$.
 (d) La réponse est oui, car $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension finie (contrairement à E), donc toutes les normes sont équivalentes sur $\mathbb{R}_n[X]$.

49. RMS 2024 102 ENS MP MPI

Soit f la fonction de \mathbb{R}_+^* vers \mathbb{R} nulle sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et définie par $f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{p+q}$ si $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ sont premiers entre eux. Quels sont les points de continuité de f ?

50. RMS 2025 635 Mines-Ponts MP-MPI

Soient E un espace vectoriel normé et f une forme linéaire continue non nulle. Soit $x_0 \in E$ tel que $f(x_0) \neq 0$.

- (a) Montrer que : $\|f\|_{op} = \frac{|f(x_0)|}{d(x_0, \text{Ker}f)}$.
- (b) Montrer que les deux propriétés (i) $\exists a \in E, \|f\|_{op} = \frac{|f(a)|}{\|a\|}$ et (ii) $\exists y \in \text{Ker}f, d(x_0, \text{Ker}f) = \|x_0 - y\|$ sont équivalentes.

51. UPS 20250506

Soit E le \mathbb{R} -espace vectoriel des fonctions bornées de \mathbb{R}_+ vers \mathbb{R} , muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Soit A , resp. B , l'ensemble des fonctions de E lipschitziennes, resp. uniformément continues.

- (a) Vérifier que $A \subset B$ mais que $B \not\subset A$.
- (b) Montrer que B est l'adhérence de A : $\bar{A} = B$. (On pourra considérer une fonction $f \in B$ et la suite des fonctions f_n définies par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+, f_n(x) = n \int_0^{1/n} f(t+x) dt$.)

SOLUTION —

- (a) \triangleright **XI.35**
- (b) Soit $f \in B$. Chaque fonction f_n est bornée. En effet, la fonction f est bornée, d'où : $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}_+, |f(x)| \leq M$. Soit $n \in \mathbb{N}^* : \forall x \geq 0, |f_n(x)| \leq n \int_0^{1/n} |f(t+x)| dt \leq n \int_0^{1/n} M dt \leq M$.

Chaque fonction f_n est lipschitzienne. En effet, $f_n(x) = n \int_x^{x+\frac{1}{n}} f(t) dt$, d'où f_n est dérivable et $f'_n(x) = n [f(x+\frac{1}{n}) - f(x)]$ donc $|f'_n(x)| \leq 2nM$. Et, par le théorème accroissements finis : $|f_n(y) - f_n(x)| \leq 2nM|y-x|$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}_+^2$.

On a montré que chaque fonction f_n appartient à A . On va montrer que $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, autrement dit que la suite (f_n) cv uniformément vers f .

Soit $\varepsilon > 0$. On veut montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}_+, n \geq N \implies |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ (un même N pour tous les x pour que la cv soit uniforme).

Cela résulte de la continuité uniforme de la fonction de f : il existe $\delta > 0$ tel que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^2, |y-x| \leq \delta \implies |f(y) - f(x)| \leq \varepsilon$ (un même δ pour tous les (x,y) car la cv est uniforme). Or $f_n(x) - f(x) = n \int_0^{1/n} f(t+x) dt - f(x) = n \int_0^{1/n} [f(t+x) - f(x)] dt$. D'où $|f_n(x) - f(x)| \leq n \int_0^{1/n} |f(t+x) - f(x)| dt$. Soit donc N tel que $\frac{1}{N} \leq \delta$. Alors $\forall x \in \mathbb{R}_+, n \geq N \implies |f_n(x) - f(x)| \leq n \int_0^{1/n} |f(t+x) - f(x)| dt \leq n \int_0^{1/n} \varepsilon dt \leq \varepsilon$.

On a mq tout élément $f \in B$ est la limite uniforme d'une suite d'éléments $f_n \in A$, autrement dit $\boxed{B \subset \bar{A}}$. D'où, d'après la question précédente, $A \subset B \subset \bar{A}$ et, par suite $\bar{A} \subset \bar{B} \subset \bar{A}$, donc $\bar{B} = \bar{A}$. Reste à montrer que \bar{B} est un fermé de E , il en résultera que $\bar{B} = B$ et donc que $\boxed{B = \bar{A}}$.

Par la caractérisation séquentielle d'un fermé : soit une suite de fonctions $f_n \in B$ convergeant vers $f \in E$ pour la norme $\|\cdot\|_\infty$. On veut montrer que $f \in B$, autrement dit que la fonction f est bornée \triangleright **TD 5.5** et uniformément continue : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^2, |f(y) - f(x)| \leq |f(y) - f_n(y)| + |f_n(y) - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)|$. Les premier et troisième termes sont inférieurs à ε si $n \geq N$ indépendant de (x,y) par cv uniforme. Le deuxième terme est inférieur à ε si $|y-x| \leq \delta$ dépendant de n mais indépendant de (x,y) par continuité uniforme de f_n .

52. RMS 2025 638 Mines-Ponts MP MPI

- (a) Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- (b) On suppose que $\|\cdot\|$ est une norme sur l'ev $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\|MN\| = \|NM\|$ si les matrices M et N sont semblables. Montrer que $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \|AB^2A\| = \|BA^2B\|$.
- (c) Existe-t-il une telle norme ?

SOLUTION.

- (a) \triangleright **exo 26 du chap. XI**
- (b) Si A est inversible d'abord, alors AB et BA sont semblables car $BA = A^{-1}(AB)A$. D'où $\|AB^2A\| = \|BA^2B\|$. Si la matrice A est quelconque ensuite, alors : par densité, c'est la limite d'une suite de matrices A_k inversibles. D'où $\|A_k B^2 A_k\| = \|BA_k^2 B\|$ pour tout k . Par continuité du produit matriciel, $A_k B^2 A_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} AB^2A$ et $BA_k^2 B \xrightarrow{k \rightarrow \infty} BA^2B$. Par continuité de la norme, $\|AB^2A\| = \|BA^2B\|$.

- (c) Choisissons $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ de sorte que $A^2 = 0$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ de sorte que $AB^2A \neq 0$. Alors $\|AB^2A\| \neq \|BA^2B\|$. Ce contre-exemple prouve qu'il n'existe pas de norme satisfaisant la propriété voulue.

53. RMS 2026 282 X MP

Soit $M \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ dont le rayon spectral est défini par $\rho(M) = \max\{|\lambda|, \lambda \in \text{Sp}(M)\}$.

- (a) Soient un vecteur $x \in \mathcal{M}_{d,1}(\mathbb{C})$ et une suite de matrices $A_n \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$. Montrer que : si la suite (A_n) converge, alors la suite $(A_n x)$ converge.
- (b) Montrer que : si $\rho(M) \geq 1$, alors la série $\sum M^n$ diverge.
- (c) Soient $\lambda \in \mathbb{C}$, $\alpha \in \llbracket 1, d \rrbracket$ et $N \in \mathcal{M}_\alpha(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente. Montrer que : $(\lambda I_\alpha + N)^n = O_{n \rightarrow \infty} (n^{\alpha-1} \lambda^n)$.
- (d) En déduire que : $M^n = O_{n \rightarrow \infty} (n^{d-1} \rho(M)^n)$.
- (e) Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Montrer que : si $\rho(M) < R$, alors la série $\sum a_n M^n$ converge.

SOLUTION.

- (a) L'application linéaire $\mathcal{M}_d(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{M}_{d,1}(\mathbb{C})$, $A_n \mapsto A_n x$ est linéaire sur un ev de dimension finie donc continue. D'où : si la suite des matrices A_n converge, alors la suite des vecteurs $A_n x$ aussi.
- (b) Soient λ une valeur propre de M de module $\rho(M) \geq 1$ et x un vecteur propre associé. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n M^k x = (\sum_{k=0}^n \lambda^k) x$. La suite de ces vecteurs diverge car la suite des complexes $\sum_{k=0}^n \lambda^k$ diverge. D'où la série de matrices $\sum M^n$ diverge d'après la question précédente.
- (c) Pour tout entier $n \geq \alpha$, $B^n = \sum_{k=0}^{\alpha-1} \binom{n}{k} \lambda^{n-k} N^k$ car $N^\alpha = 0$. Si $n \rightarrow \infty$ à k fixé, alors $\binom{n}{k} = O(n^k)$, d'où $B^n = O(n^{\alpha-1} \lambda^n)$.
- (d) On réduit la matrice M à l'aide de ses sous-espaces caractéristiques : $M = PDP^{-1}$, avec $P \in GL_n(\mathbb{C})$, D une matrice diagonale par blocs, comportant des blocs de la forme $B = \lambda I_\alpha + N$ où $\lambda \in \text{Sp}(M)$ et $N \in \mathcal{M}_\alpha(\mathbb{C})$ est une matrice nilpotente. Comme chacun des blocs diagonaux de D est de taille au plus d , il vient $D^n = O(n^{d-1} \rho(M)^n)$, donc $M^n = O(n^{d-1} \rho(M)^n)$.
- (e) On suppose $\rho(M) < R$. Fixons un réel r tel que $\rho(M) < r < R$. Alors $n^{d-1} \rho(M)^n = o(r^n)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$, d'où $a_n M^n = o(a_n r^n)$. Comme $r < R$, la série $\sum |a_n r^n|$ converge, donc la série $\sum a_n M^n$ est absolument convergente, a fortiori convergente dans $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$.

1.5 Algèbre générale

54. RMS 2015 384 X ESPCI PC, RMS 2014 1165 CCP PSI

- (a) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé à racines simples.
- Calculer $\frac{P'(x)}{P(x)}$ pour tout x appartenant à \mathbb{R} privé des racines de P . En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x)P''(x) \leq P'(x)^2$.
 - Montrer que, si $\deg P \geq 2$, alors P' est aussi scindé à racines simples. En déduire que, si $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$, alors

$$a_k a_{k+2} \leq a_{k+1}^2 \text{ pour tout } k \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket.$$

- (b) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé. Le polynôme P' l'est-il aussi ?

SOLUTION —

- (a) i. En notant r_1, \dots, r_n les racines de P ,

$$\forall x \in \mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{r_1, \dots, r_n\}, \quad \frac{P'(x)}{P(x)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{x - r_k}.$$

Et, en dérivant : $\forall x \in \mathcal{D}$, $\frac{P''(x)P(x) - (P'(x))^2}{P(x)^2} = -\sum_{k=1}^n \frac{1}{(x-r_k)^2} \leq 0$, ce qui donne $P''(x)P(x) \leq (P'(x))^2$ pour tout $x \in \mathcal{D}$ mais aussi en r_1, \dots, r_n puisque $P(r_k) = 0$ et que $(P')^2(r_k) \geq 0$.

- ii. Soit $n = \deg P \geq 2$: le théorème de Rolle (à énoncer !) assure que, entre deux racines distinctes de P , la dérivée P' s'annule au moins une fois et que, donc, P' possède au moins $n-1$ racines distinctes deux à deux, en fait exactement $n-1$ car $\deg P' = n-1$. Donc P' est scindé à racines simples et il en est de même de $P'', \dots, P^{(n-1)}$. L'inégalité peut donc être appliquée à $P^{(k)}$ pour chaque $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, ce qui donne en $x = 0$: $P^{(k)}(0)P^{(k+2)}(0) \leq P^{(k+1)}(0)^2$ et donc $k!a_k \times (k+2)!a_{k+2} \leq (k+1)!^2 a_{k+1}^2$. On en déduit que $a_k a_{k+2} \leq \frac{k+1}{k+2} a_{k+1}^2 \leq a_{k+1}^2$ pour chaque $k \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket$.
- (b) Si $\deg P < 2$, alors P' n'est pas scindé. Supposons désormais que $\deg P = n \geq 2$ et notons r_i ($1 \leq i \leq q$) les racines, distinctes deux à deux, de P et m_i leur multiplicité : $m_1 + \dots + m_q = n$. Avec le même raisonnement que ci-dessus, on obtient $q-1$ racines de P' deux à deux distinctes et distinctes des r_i . D'autre part, chaque r_i est une racine de P' d'ordre $m_i - 1$. Il reste à compter les racines réelles de P' : $q-1 + (m_1 - 1) + \dots + (m_q - 1) = n-1$ et P' est donc scindé.

REMARQUE : en dérivant $P = K \prod_{k=1}^q (X - r_k)^{m_k}$ (où $K \in \mathbb{R}^*$), on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{r_1, \dots, r_q\}, \quad \frac{P'(x)}{P(x)} = \sum_{k=1}^q \frac{m_k}{x - r_k}.$$

Un exercice en rapport : RMS 2016 465 Mines Ponts PSI

Soit $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré $n \geq 2$ ayant n racines réelles distinctes deux à deux. Montrer que P n'a pas deux coefficients consécutifs nuls, autrement dit $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, |a_k| + |a_{k+1}| \neq 0$.

SOLUTION — Si $a_k = a_{k+1} = 0$, alors $P^{(k)}(0) = P^{(k+1)}(0) = 0$ donc $P^{(k)}$ admet 0 comme racine au moins double. Or $P \in \mathbb{R}[X]$ est scindé à racines simples, donc ses dérivées $P', \dots, P^{(n-1)}$ le sont aussi. Par conséquent, P ne peut pas être scindé à racines simples sur \mathbb{R} .

55. RMS 2014 892 Centrale PSI

(a) Soient un réel a et une fonction f continue sur $[a, +\infty[$ et dérivable sur $]a, +\infty[$. On suppose que f s'annule en a et tend vers 0 en $+\infty$: qu'en déduire ? (On pourra utiliser la fonction $x \mapsto f(a + \frac{1}{x} - 1)$ pour le prouver.)

(b) Soient $P \in \mathbb{R}[X]$ et $Q = \sum_{k=0}^{+\infty} P^{(k)}$. Montrer que, si P n'a pas de racine réelle, alors Q non plus. (On pourra utiliser la fonction $x \mapsto Q(x)e^{-x}$.)

SOLUTION —

(a) On en déduit qu'il existe $b > a$ tel que $f'(b) = 0$. C'est une variante du théorème de Rolle, qui s'y ramène grâce à la fonction g définie sur $[0, 1]$ par $g(x) = f(a + \frac{1}{x} - 1)$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 0$. Cette fonction est d'une part continue sur $[0, 1]$ car f est continue sur $[a, +\infty[$ et $\lim_{+\infty} f = 0 = g(0)$. Elle est d'autre part dérivable sur $]0, 1[$ car f est dérivable sur $]a, +\infty[$. Or $g(0) = g(1) = 0$. D'après le théorème de Rolle, il existe donc $c \in]0, 1[$ tel que $g'(c) = 0$. Or $g'(x) = -\frac{1}{x^2} f'(a + \frac{1}{x} - 1)$, d'où $f'(a + \frac{1}{c} - 1) = 0$. Enfin $a + \frac{1}{c} - 1 > a$ car $c \in]0, 1[$.

(b) Supposons que Q a une racine réelle a . Alors la fonction $f : x \mapsto Q(x)e^{-x}$ s'annule en a et tend vers 0 en $+\infty$, donc il existe $b > a$ tel que $f'(b) = 0$. Or $P = Q - Q'$, donc $f'(b) = -P(b)e^{-b}$ et $P(b) = 0$. D'où le résultat par contraposée.

56. RMS 2013 288 X ESPCI PC

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(X^2 + 1) = P(X)^2 + 1$ et $P(0) = 0$. Soit la suite réelle $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $a_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = a_n^2 + 1$. Calculer $P(a_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Conclure.

SOLUTION — Comme a_n est réel et que $x^2 - x + 1$ reste strictement positif sur \mathbb{R} on a $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} - a_n = a_n^2 - a_n + 1 > 0$ et la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante donc injective ($m \neq n \Rightarrow a_m \neq a_n$).

Soit alors P une solution du problème posé. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $P(a_n) = a_n$.

C'est vrai pour $n = 0$ puisque $a_0 = 0$ et $P(0) = 0$ et si c'est vrai pour un entier n donné alors

$$P(a_{n+1}) = P(a_n^2 + 1) = P(a_n)^2 + 1 = a_n^2 + 1 = a_{n+1}.$$

Il s'ensuit que le polynôme $P(X) - X$ est nul car il admet une infinité de racines et donc que $P = X$. Ceci est la fin de l'ANALYSE.

SYNTHÈSE : le polynôme X est bien une solution, donc c'est l'unique solution.

57. RMS 2012 272 X ESPCI PC

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que : $\forall t \in \mathbb{R}, P_n(\sin^2 t) = \cos(2nt)$ et le déterminer.

SOLUTION — Si les polynômes P et Q vérifient $\forall t \in \mathbb{R}, P(\sin^2 t) = \cos(2nt) = Q(\sin^2 t)$, alors $P - Q$ possède une infinité de racines (tous les réels de $[0, 1]$), donc il est nul, donc $P = Q$. Ceci démontre l'unicité.

Les formules d'Euler donnent

$$\begin{aligned} \cos(2nt) &= \operatorname{Re}((e^{it})^{2n}) = \operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^n \binom{2n}{k} i^k \sin(t)^k \cos(t)^{2n-k}\right) = \sum_{p=0}^n \binom{2n}{2p} (-1)^p \sin(t)^{2p} \cos(t)^{2n-2p} \\ &= \sum_{p=0}^n (-1)^p \binom{2n}{2p} (\sin^2 t)^p (1 - \sin^2 t)^{n-p} = P_n(\sin^2 t), \end{aligned}$$

où

$$P_n = \sum_{p=0}^n (-1)^p \binom{2n}{2p} X^p (1 - X)^{n-p}.$$

AUTRE MÉTHODE — On peut donner une autre expression de P_n en calculant

$$\begin{aligned}\cos(2nt) &= \operatorname{Re}\left((e^{2it})^n\right) = \operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} i^k \sin(2t)^k \cos(2t)^{n-k}\right) = \sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2p} (-1)^p \sin(2t)^{2p} \cos(2t)^{n-2p} \\ &= \sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^p \binom{n}{2p} 2^{2p} (\sin^2 t)^p (1 - \sin^2 t)^p (1 - 2\sin^2 t)^{n-2p} = P_n(\sin^2 t),\end{aligned}$$

où $P_n = \sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^p \binom{n}{2p} 2^{2p} X^p (1-X)^p (1-2X)^{n-2p}$.

58. RMS 2013 1048 TPE EIVP PC

Soient a, b dans \mathbb{C} , $n \in \mathbb{N}^*$ et $P = (X-a)^n (X-b)^n$.

Donner une expression de la dérivée n -ième de P et en déduire $\sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2$ en fonction de n .

SOLUTION — Voir une autre méthode pour calculer cette somme dans le corrigé de l'oral n° 126. On note que $(X^n)^{(p)} = \frac{n!}{(n-p)!} X^{n-p}$ pour tout $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$ puis la formule de Leibniz donne

$$P^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} [(X-a)^n]^{(k)} [(X-b)^n]^{(n-k)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(n!)^2}{k!(n-k)!} (X-a)^{n-k} (X-b)^k = n! \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 (X-a)^{n-k} (X-b)^k$$

Dans le cas où $a = b = 0$, l'identité précédente s'écrit $P^{(n)} = n! X^n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$. Par ailleurs, $P = X^{2n}$, donc $P^{(n)} = \frac{(2n)!}{n!} X^n$ et on en déduit que

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \binom{2n}{n}.$$

59. RMS 2010 606 Mines Ponts PC

Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $(X+4)P(X) = XP(X+1)$.

SOLUTION — Analyse. Toute solution P vérifie

$$P(0) = P(-1) = P(-2) = P(-3) = 0,$$

donc il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = X(X+1)(X+2)(X+3)Q$.

Synthèse. La propriété recherchée est vérifiée *ssi*

$$X(X+1)(X+2)(X+3)(X+4)Q(X) = X(X+1)(X+2)(X+3)(X+4)Q(X+1),$$

ssi $Q(X) = Q(X+1)$ ce qui équivaut à $Q = \text{constante}$ (car le polynôme $Q - Q(0)$ admet une infinité de racines).

Conclusion. Un polynôme P est une solution *ssi* $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $P = \lambda X(X+1)(X+2)(X+3)$.

60. RMS 2012 268 X ESPCI PC

Mots-clés : nombre de diviseurs d'un entier

- Soit n un entier strictement positif dont la décomposition en facteurs premiers est $\prod_{j=1}^r p_j^{\alpha_j}$. Déterminer le nombre de diviseurs de n .
- Quels sont les entiers $n \in \mathbb{N}^*$ ayant un nombre impair de diviseurs ?

SOLUTION —

- Si la décomposition de n en facteurs premiers est $\prod_{j=1}^r p_j^{\alpha_j}$, les diviseurs de n sont les $\prod_{j=1}^r p_j^{\beta_j}$ avec $\beta_j \in \llbracket 0, \alpha_j \rrbracket$ pour tout j . L'ensemble des diviseurs de n possède donc $\prod_{j=1}^r (1 + \alpha_j)$ éléments.
- Un produit d'entiers étant impair si et seulement si tous ses facteurs sont impairs, on déduit de la question précédente que les entiers $n \in \mathbb{N}^*$ recherchés sont ceux tels que α_j est pair pour tout j , c'est-à-dire les carrés.

61. RMS 2024 14 ENS MP MPI

Mots-clés : formule de Grassmann

Soit G un groupe fini. Si X et Y sont des parties non vides de G , alors on pose $X^{-1} = \{x^{-1}, x \in X\}$ et $XY = \{xy, (x, y) \in X \times Y\}$. Dans la suite, X désigne une partie non vide de G .

- On suppose que $|XX| < 2|X|$. Soit $(a, b) \in X^2$. Montrer que $Xa \cap Xb \neq \emptyset$. En déduire que $XX^{-1} = X^{-1}X$.

(b) On suppose que $|XX^{-1}| < \frac{3}{2}|X|$. Montrer que $X^{-1}X$ est un sous-groupe de G .

SOLUTION — On utilisera la formule de Grassmann $|A \cup B| + |A \cap B| = |A| + |B|$.

(a) Soit $(a, b) \in X^2$. Pour montrer que $XX^{-1} \subset X^{-1}X$, on cherche $(x, y) \in X^2$ tel que $ab^{-1} = x^{-1}y$, i.e. $xa = yb$. Il suffit de montrer que $Xa \cap Xb$ est non vide. Or Xa et Xb sont des parties de XX de même cardinal que X . De $|XX| < 2|X|$, on tire que $|Xa \cap Xb| > 0$.

(b) L'ensemble $X^{-1}X$ contient le neutre et est stable par inversion. Il reste à montrer la stabilité par produit, i.e. que, pour tout $(a, b, x, y) \in X^4$, $ab^{-1}xy^{-1} \in XX^{-1}$.

Or Xa^{-1} et Xb^{-1} sont des parties de XX^{-1} de même cardinal que X . De $|XX^{-1}| < \frac{3}{2}|X|$, on tire que $|Xa^{-1} \cap Xb^{-1}| > \frac{1}{2}|X|$. Il existe donc strictement plus de $\frac{1}{2}|X|$ couples $(a_i, b_i) \in X^2$ tels que $a_i a_i^{-1} = b_i b_i^{-1}$, i.e. $a^{-1}b = a_i^{-1}b_i$.

De même, il existe strictement plus de $\frac{1}{2}|X|$ couples $(x_j, y_j) \in X^2$ tels que $x^{-1}y = x_j^{-1}y_j$. Au moins un des a_i est donc égal à l'un des x_j . Et alors $a^{-1}bx^{-1}y = a_i^{-1}b_i x_j^{-1}y_j = a_i^{-1}y_j \in X^{-1}X$.

62. RMS 2024 424 X ESPCI PC

On veut montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $m \in \mathbb{N}^*$ et $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m) \in \{-1; +1\}^m$ tel que $n = \sum_{k=1}^m \varepsilon_k k^2$.

(a) Prouver la propriété pour tout $n \in \{1; 2; 3\}$.

(b) Développer les polynômes $(X+3)^2 - (X+1)^2$ et $(X+4)^2 - (X+2)^2$ et conclure.

SOLUTION —

(a) $1 = 1^2$, $2 = -1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2$ et $3 = -1^2 + 2^2$.

(b) $(X+3)^2 - (X+1)^2 = 4X+8$ et $(X+4)^2 - (X+2)^2 = 4X+12$, d'où $(k+1)^2 - (k+2)^2 - (k+3)^2 + (k+4)^2 = 4$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

La division euclidienne de n par 4 donne $n = 4q + r$ et $r < 4$. On décompose alors r en utilisant la première question et on écrit $4q$ en sommant q expressions consécutives de 4 obtenues précédemment.

63. RMS 2024 519 Mines Ponts MP MPI

Déterminer tous les couples $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ tels que $3^m = 8 + n^2$. (On pourra commencer par montrer que n est impair et que m est pair.)

SOLUTION — Analyse : en réduisant modulo 2, il vient $1 \equiv 3^m \equiv n^2[2]$, donc n est impair. Et en réduisant modulo 4, $(-1)^m \equiv 3^m \equiv n^2 \equiv 1[4]$ (car n est impair) donc m est pair. L'équation équivaut donc à $(3^{m/2} + n)(3^{m/2} - n) = 8$. D'où l'on tire que $(3^{m/2} + n, 3^{m/2} - n) \in \{(4, 2); (8, 1)\}$ et même que $(3^{m/2} + n, 3^{m/2} - n) = (4, 2)$ car $3^{m/2} + n$ et $3^{m/2} - n$ ont la même parité. D'où, s'il y a une solution, alors c'est $(m, n) = (2, 1)$.

Synthèse : $3^2 = 8 + 1^2$, donc l'équation $3^m = 8 + n^2$ possède une unique solution $(m, n) = (2, 1)$.

64. RMS 2024 12 ENS MP MPI

Soient un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et une transposition (ab) telle que $1 \leq a < b \leq n$.

(a) Soit un entier $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la transposition (12) et le cycle $c = (12 \dots n)$ engendrent le groupe symétrique S_n .

(b) Montrer que la transposition $\tau = (13)$ et le cycle $c = (1234)$ n'engendrent pas le groupe symétrique S_4 . (On pourra s'intéresser à la parité de $\tau(i) - i$ et de $c(i) - i$ pour tout $i \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$.)

(c) Montrer que la transposition (ab) et le cycle $c = (12 \dots n)$ engendrent S_n si, et seulement si, $b - a$ et n sont premiers entre eux.

SOLUTION — Notation : on confond chaque élément k de \mathbb{Z} avec l'unique élément de $\llbracket 1, n \rrbracket$ congru à k modulo n . On rappelle que, pour toute permutation $\sigma \in S_n$, $\sigma(ab)\sigma^{-1} = (\sigma(a)\sigma(b))$.

(a) Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $c^k(12)c^{-k} = (k+1k+2)$ appartient au sous-groupe G engendré par (12) et c . Puis $(kk+1)(1k)(kk+1) = (1k+1)$ prouve par récurrence que chaque transposition $(1k)$ appartient à G . Et $(1j)(1k)(1j) = (jk)$ prouve que G contient toutes les transpositions. Or les transpositions engendrent S_n , donc $G = S_n$.

(b) Pour tout i , $\tau(i) - i$ est pair et $c(i) - i$ est impair. Par suite, pour chaque f appartenant au sous-groupe G engendré par τ et c , la parité de $f(i) - i$ est un invariant au sens où elle ne dépend pas de i . Ce n'est pas le cas si $f = (12)$, d'où $(12) \notin G$, donc $G \neq S_n$.

(c) Si $b - a$ n'est pas premier avec n , alors on pose le pgcd $d = (b - a) \wedge n$ et le sous-groupe G engendré par (ab) et $(12 \dots n)$. Comme à la question précédente, pour tout $f \in G$, $f(i) - i$ est invariant modulo n , d'où $(12) \notin G$, donc $G \neq S_n$.

Réciproquement, supposons que $b - a$ est premier avec d . Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $c^k(ab)c^{-k} = (k+ak+b)$ appartient au sous-groupe G engendré par (ab) et c . En particulier, $(1, 1+b-a) \in G$. Puis $(1+k(b-a)1 + (k+1)(b-a))(11+k(b-a))(1+k(b-a)1 + (k+1)(b-a)) = (11+(k+1)(b-a))$ prouve par récurrence que chaque transposition $(11+k(b-a))$ appartient à G . Or il existe k tel que $k(b-a) = 1$ car $b-a$ est premier avec d par hypothèse, d'où $(12) \in G$, donc $G = S_n$ d'après la première question.

65. B5 X

Mots-clés : sous-groupes finis de $GL_n(\mathbb{C})$

Soient E un \mathbb{C} -ev de dimension finie et G un sous-groupe fini de l'ensemble $GL(E)$ des automorphismes de E . Montrer que :

- (a) tout endomorphisme de G est diagonalisable et que ses valeurs propres sont des racines de l'unité.
 (b) $p = \frac{1}{\text{Card}(G)} \sum_{f \in G} f$ est un projecteur et en déduire que la trace moyenne $\frac{1}{\text{Card}G} \sum_{f \in G} \text{tr} f$ est égale à la dimension de l'ensemble $\{x \in E \mid \forall g \in G, g(x) = x\}$ des vecteurs invariants.

SOLUTION —

- (a) Soit $f \in G$: l'ensemble $\{f^k, k \in \mathbb{Z}\}$ des itérés est fini car c'est une partie de G , il existe donc $i < j$ tels que $f^i = f^j$ et par suite $f^k = \text{id}_E$ si on pose $k = j - i > 0$. Le polynôme $X^k - 1$ est donc un polynôme annulateur de f . Le spectre de f est donc inclus dans l'ensemble des racines k -ièmes de l'unité. De plus, le polynôme $X^k - 1$ est scindé à racines simples, donc f est diagonalisable.
 (b) On sait que : si $p \in \mathcal{L}(E)$ est un projecteur, alors $\text{rg}(p) = \text{tr}(p)$. On va montrer que : d'une part, $p = \frac{1}{\text{Card}(G)} \sum_{f \in G} f$ est un projecteur ; d'autre part, $\{x \in E \mid \forall g \in G, g(x) = x\} = \text{Im}(p)$, ce qui permettra de conclure.

D'une part, $p^2 = \frac{1}{\text{Card}(G)^2} \sum_{f \in G} \sum_{g \in G} f \circ g$. Or $\sum_{g \in G} f \circ g = \sum_{g \in G} g$ car l'application $G \rightarrow G, g \mapsto f \circ g$ est bijective (car $g \mapsto f^{-1} \circ g$ est sa réciproque). D'où $p^2 = \frac{1}{\text{Card}(G)^2} \sum_{f \in G} \sum_{g \in G} g = \frac{1}{\text{Card}(G)} \sum_{g \in G} g = p$.

D'autre part, si $\forall g \in G, g(x) = x$, alors $p(x) = x$, ce qui prouve que $\text{Im}(p) \subset \{x \in E \mid \forall g \in G, g(x) = x\}$. Pour prouver l'autre inclusion, soit $y \in \text{Im}(p)$. Il existe alors $x \in E$ tel que $y = \frac{1}{\text{Card}(G)} \sum_{f \in G} f(x)$. Pour tout $g \in G$, $g(y) = \frac{1}{\text{Card}(G)} \sum_{f \in G} g \circ f(x) = \frac{1}{\text{Card}(G)} \sum_{f \in G} f(x)$ par la même bijection que précédemment. D'où $g(y) = y$ pour tout G .

66. RMS 2025 1197 Centrale MP MPI

Mots-clés : sous-groupes finis de $GL_n(\mathbb{Z})$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à coefficients entiers et $GL_n(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices $M \in GL_n(\mathbb{R})$ telles que M et M^{-1} sont à coefficients entiers.

- (a) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Montrer que $A \in GL_n(\mathbb{Z})$ ssi $\det(A) = \pm 1$. (On pourra utiliser la comatrice.) Montrer que : $A^k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$ ssi A est nilpotente.
 (b) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note $A = \frac{1}{3}(M - I_n)$. On suppose que $\exists k \in \mathbb{N}^*, M^k = I_n$ et que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Montrer que A est diagonalisable et que $M = I_n$.
 (c) Soient G un sous-groupe fini de $GL_n(\mathbb{Z})$. On note $\varphi : G \rightarrow GL_n(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ le morphisme qui, à $M = (m_{ij})$ associe $\varphi(M) = (\bar{m}_{ij})$ où \bar{m}_{ij} est la classe d'équivalence de m_{ij} modulo 3. Montrer que $\ker(\varphi) = \{I_n\}$.
 (d) Montrer que $|GL_n(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})| = (3^n - 1)(3^n - 3) \cdots (3^n - 3^{n-1})$. En déduire un majorant des cardinaux des sous-groupes finis de $GL_n(\mathbb{Z})$.

SOLUTION —

- (a) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$.
 Si $A \in GL_n(\mathbb{Z})$, alors $\det A$ et $\det(A^{-1})$ sont des entiers. Or ils sont inverses l'un de l'autre, donc $\det A = \pm 1$. Réciproquement : si $\det A = \pm 1$, alors $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{Com}(A)^T$ est à coefficients entiers.
 Si A est nilpotente, alors A^k est nul APCR, donc tend vers 0. Réciproquement : si A^k tend vers 0, alors tous ses coefficients tendent vers 0, or ce sont des entiers et une suite d'entiers convergente est stationnaire. Donc $A^k = 0$ APCR.
 (b) Le polynôme $X^k - 1$ est annulateur de la matrice M et est scindé à racines simples, donc M est diagonalisable, donc A aussi. De plus, si $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$, alors $3\lambda + 1 \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(M)$, d'où $3\lambda + 1$ est une racine k -ième de l'unité, d'où $|3\lambda + 1| = 1$. Donc $|\lambda| \leq \frac{2}{3} < 1$ par l'inégalité triangulaire. D'où A^k tend vers 0. Donc la matrice A est nilpotente d'après la question précédente, d'où $\lambda = 0$, donc $A = 0$ et $M = I_n$.
 (c) Si $M \in \ker(\varphi)$, alors : d'une part, $A = \frac{1}{3}(M - I_n)$ est à coefficients entiers. D'autre part, le groupe G étant fini, l'élément M est d'ordre fini : $\exists k \in \mathbb{N}^*, M^k = I^n$. D'après la question précédente, $M = I_n$. D'où $\ker(\varphi) \subset \{I_n\}$. Donc $\ker(\varphi) = \{I_n\}$ car $I_n \in \ker(\varphi)$.
 (d) Une matrice de $GL_n(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ se construit colonne par colonne :
 — il y a $3^n - 1$ colonnes non nulles, donc $3^n - 1$ manières de construire C_1 ;
 — il y a 3 éléments dans $\text{Vect}(C_1)$, d'où $3^n - 3$ manières de construire C_2 non liée à C_1 ;

- il y a 3^2 éléments dans $\text{Vect}(C_1, C_2)$, d'où $3^n - 3^2$ manières de construire $C_3 \notin \text{Vect}(C_1, C_2)$;
 - etc
- D'où le cardinal de $GL_n(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$. D'après la question précédente, l'application φ est injective, donc $|G| \leq |GL_n(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})|$.

2 Analyse

2.1 Suites & séries numériques

67. RMS 2006 1124 CCP PC

Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série convergente à termes strictement positifs. Montrer que les séries $\sum_{n \geq 1} \frac{\sqrt{u_n}}{n}$ et $\sum_{n \geq 0} e^{-1/u_n}$ convergent.

SOLUTION. — On applique l'inégalité $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ avec $a = \sqrt{u_n}$ et $b = \frac{1}{n}$. On obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq \frac{\sqrt{u_n}}{n} \leq \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{1}{n^2} \right).$$

Comme les deux séries de termes généraux u_n et $\frac{1}{n^2}$ convergent, $\sum_{n \geq 1} \frac{\sqrt{u_n}}{n}$ converge aussi.

On sait que $\lim_{-\infty} x e^x = 0$. Comme la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est convergente, alors la suite (u_n) converge vers zéro. Comme de plus $u_n > 0$ pour tout n , la suite de terme général $-\frac{1}{u_n}$ diverge vers $-\infty$. Par croissances comparées, la suite de terme général $-\frac{e^{-1/u_n}}{u_n}$ converge vers zéro, donc $e^{-1/u_n} = o(u_n)$. Comme la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge absolument, $\sum_{n \geq 0} e^{-1/u_n}$ converge aussi.

68. RMS 2014 668 Mines Ponts PSI

Soit la suite définie par $a_0 > 0$ et $a_{n+1} = 1 - e^{-a_n}$.

- (a) Étudier la limite de cette suite.
- (b) Déterminer la nature de la série de terme général $(-1)^n a_n$.
- (c) Déterminer la nature de la série de terme général a_n^2 .
- (d) Étudier la série de terme général $\ln\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$. En déduire la nature de la série de terme général a_n .

SOLUTION. —

- (a) Pour tout réel x , $e^x \geq 1 + x$, d'où $a_{n+1} \leq a_n$ pour tout n , donc (a_n) est décroissante et, par récurrence, est minorée par 0, donc (a_n) converge. Sa limite vérifie $\ell = 1 - e^{-\ell}$ donc $\ell = 0$.
- (b) La série $\sum (-1)^n a_n$ est alternée et vérifie les hypothèses du CSSA : elle converge.
- (c) On effectue un développement limité : puisque $a_n \rightarrow 0$, $a_{n+1} = a_n - \frac{a_n^2}{2} + o(a_n^2)$ donc $a_n^2 \sim 2(a_n - a_{n+1})$ dont la série converge car ses sommes partielles sont télescopiques et la suite (a_n) converge.
- (d) $S_n = \sum_{k=0}^n \ln \frac{a_{k+1}}{a_k} = \ln a_{n+1} - \ln a_0 \rightarrow -\infty$ donc la série diverge.

En reprenant le développement limité précédent, on a $\ln \frac{a_{n+1}}{a_n} \sim -\frac{a_n}{2}$ (< 0). On en déduit que $\sum a_n$ diverge.

69. RMS 2013 688 Mines Ponts PC

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ bornée et intégrable sur \mathbb{R}_+ . On pose $\alpha = \sup_{\mathbb{R}_+} f$.

- (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que f^n est intégrable. Soit $u_n = \int_0^{+\infty} f^n$.
- (b) Si $\alpha < 1$, montrer que la série de terme général u_n est convergente.
- (c) Si $\alpha > 1$, montrer que la série de terme général u_n est divergente.

SOLUTION. —

- (a) Comme $0 \leq f^n \leq \alpha^{n-1} f$ et comme f est intégrable sur \mathbb{R}_+ , alors f^n aussi, donc la suite (u_n) est bien définie.
- (b) Si $\alpha < 1$, l'inégalité de la question précédente montre que $0 \leq u_n \leq u_1 \alpha^{n-1}$, qui est le terme général d'une série géométrique
- (c) Si $\alpha > 1$, il existe $t_0 \in \mathbb{R}_+$ tel que $f(t_0) > 1$. On choisit λ tel que $1 < \lambda < f(t_0)$. La continuité de f donne l'existence d'un intervalle $J \subset \mathbb{R}_+$ non banal, contenant t_0 , tel que $f \geq \lambda$ sur J . Si $\ell > 0$ est la longueur de J , la positivité de f montre que

$$u_n = \int_0^{+\infty} f^n \geq \int_J f^n \geq \ell \lambda^n.$$

Le minorant étant un terme général de série géométrique divergente, on conclut que $\sum u_n$ diverge.

70. RMS 2012 1327 CCP PC

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ 1-périodique et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \int_n^{n+1} \frac{f(t)}{t} dt$.

Montrer que la série de terme général u_n converge si, et seulement si, $\int_0^1 f(t) dt = 0$.

SOLUTION. —

Le changement de variable $t = n + x$ dans l'intégrale qui définit u_n et la périodicité de f montrent que

$$u_n = \int_0^1 \frac{f(x)}{n+x} dx = \frac{1}{n} \int_0^1 f(x) dx + \int_0^1 f(x) \left(\frac{1}{n+x} - \frac{1}{n} \right) dx = \frac{1}{n} \int_0^1 f(x) dx - \int_0^1 \frac{x f(x)}{n(n+x)} dx.$$

On pose $M = \int_0^1 x|f(x)| dx$. Comme $0 \leq \frac{1}{n+x} \leq \frac{1}{n}$ pour tout $x \in [0, 1]$, l'inégalité triangulaire montre que $|\int_0^1 \frac{x f(x)}{n(n+x)} dx| \leq \frac{M}{n^2}$, ce qui achève de prouver que

$$u_n = \frac{1}{n} \int_0^1 f(t) dt + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Soit $\langle f \rangle = \int_0^1 f(t) dt$ la valeur moyenne de la fonction 1-périodique f . Si cette valeur moyenne est non nulle, alors $u_n \sim \frac{\langle f \rangle}{n}$, donc la série de terme général u_n diverge. Si elle est nulle, $u_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, donc la série en question converge.

71. RMS 132 1163 CCP PSI 2021, RMS 130 1236 CCP PSI 2019

Soient deux suites réelles (a_n) positive et (u_n) définie par $u_0 \geq 0$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \sqrt{u_n^2 + a_n^2} \right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- (a) Comparer $u_{n+1} - u_n$ et $\frac{1}{2}a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- (b) Déterminer un équivalent de a_n dans le cas où $u_n = \frac{n}{n+1}$.
- (c) La convergence de la suite (u_n) implique-t-elle la convergence de la série $\sum a_n$? Et réciproquement?

SOLUTION. —

- (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2} \left(\sqrt{u_n^2 + a_n^2} - u_n \right)$. Et $u_n^2 + a_n^2 \leq (u_n + a_n)^2$ car u_n et a_n sont positifs, donc $u_{n+1} - u_n \leq \frac{1}{2}a_n$.
- (b) Si $u_n = \frac{n}{n+1}$, alors $a_n = 2\sqrt{u_n} \sqrt{u_{n+1} - u_n} \sim \frac{2}{n}$.
- (c) La deuxième question prouve par un contre-exemple, que la convergence de la suite (u_n) n'implique pas la convergence de la série $\sum a_n$.

Réciproquement : supposons que la série $\sum a_n$ converge. Les suites $u_{n+1} - u_n$ et a_n sont positives et, d'après la première question, $u_{n+1} - u_n \leq \frac{1}{2}a_n$. Par comparaison de séries à termes positifs, on en déduit que la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$ converge. D'où la suite $S_n = \sum_{k=0}^n (u_{k+1} - u_k)$ des sommes partielles converge. Donc $u_{n+1} = u_0 + S_n$ converge.

72. RMS 2007 912 CCP PSI

Soient, pour tout réel $t \geq 1$, $f(t) = \frac{t}{t^2+t+1}$ et, pour tout entier $n \geq 1$, $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t) \sin t dt$.

Étudier le sens de variation de la fonction f , le sens de variation de la suite $(|u_n|)$ et la nature de la série $\sum u_n$.

SOLUTION. — Comme f est positive et comme la fonction sinus est du signe de $(-1)^n$ sur $[n\pi, (n+1)\pi]$, la série $\sum u_n$ est alternée.

De plus, $|u_n| = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t) |\sin t| dt$. On cherche à montrer que la suite $(|u_n|)$ tend vers 0 en décroissant.

La fonction f est de classe \mathcal{C}^1 et décroissante sur $[1, +\infty[$ car

$$\forall t \in [1, +\infty[, \quad f'(t) = \frac{t^2 + t + 1 - t(2t + 1)}{(t^2 + t + 1)^2} = \frac{-t^2 + 1}{(t^2 + t + 1)^2} \leq 0.$$

Alors, pour tout $n \geq 1$, le changement de variable $t = u + \pi$ (qui est bien de classe \mathcal{C}^1 dans la deuxième intégrale) montre que

$$|u_n| - |u_{n+1}| = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t) |\sin t| dt - \int_{(n+1)\pi}^{(n+2)\pi} f(t) |\sin t| dt = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} (f(t) - f(t + \pi)) |\sin t| dt \geq 0,$$

puisque f est décroissante sur $[1, +\infty[$ et que $n\pi \geq 1$. On en déduit que $(|u_n|)_{n \geq 1}$ décroît.

Enfin, la majoration de $|\sin|$ par 1 et de f par $f(n\pi)$ sur $[n\pi, (n+1)\pi]$ montrent que $|u_n| \leq \pi f(n\pi) \sim \frac{1}{n}$, donc que $\lim u_n = 0$.

On conclut que $\sum u_n$ converge d'après le théorème spécial des séries alternées.

73. RMS 2008 980 Télécom Sud Paris PSI, RMS 2013 657 Mines Ponts PC, RMS 2014 751 Mines Ponts PC

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{(-1)^n \cos(u_{n-1})}{n}$. Nature de la série de terme général u_n ?

SOLUTION. — Pour $n \geq 1$, on a $|u_n| \leq \frac{1}{n}$, donc la suite de terme général u_n tend vers zéro, donc on dispose du développement limité $\cos(u_{n-1}) = 1 - \frac{u_{n-1}^2}{2} + o(u_{n-1})^2$. Par suite

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n} - \frac{(-1)^n u_{n-1}^2}{2n} + o\left(\frac{u_{n-1}^2}{n}\right) = x_n + y_n + o(y_n),$$

avec des notations évidentes pour les suites (x_n) et (y_n) . La série $\sum x_n$ converge, par application du théorème des séries alternées. Comme $|y_n| \leq \frac{1}{2n(n-1)^2}$ pour tout $n \geq 2$, d'où $y_n + o(y_n) = O(\frac{1}{n^2})$ et $\frac{1}{n^2}$ ne change pas de signe, donc la série $\sum (y_n + o(y_n))$ converge absolument. Finalement, la série $\sum u_n$ converge.

74. RMS 2012 328 X ESPCI PC

Mots-clés : transformation d'Abel

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On suppose que (u_n) est décroissante et que la série de terme général u_n converge.

- (a) Montrer que $\sum_{k=0}^n u_k = (n+1)u_n + \sum_{k=1}^n k(u_{k-1} - u_k)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
 (b) Montrer que la suite de terme général $(n+1)u_n$ converge. En déduire que $nu_n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$.

SOLUTION. — (La transformation d'Abel est l'analogie discret de l'IPP, c'est-à-dire qu'elle est aux séries ce que l'IPP est aux intégrales.) Comme la série converge, la suite (u_n) converge vers zéro, et comme elle décroît, elle est positive. On note S la somme de la série de terme général u_n . On effectue une transformation d'Abel sur la somme partielle $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$: la positivité des u_n permet d'écrire que

$$\begin{aligned} S \geq S_n &= \sum_{k=0}^n (k+1-k)u_k = \sum_{k=0}^n (k+1)u_k - \sum_{k=0}^n k u_k = \sum_{k=1}^{n+1} k u_{k-1} - \sum_{k=0}^n k u_k = (n+1)u_n + \sum_{k=1}^n k(u_{k-1} - u_k) \\ &\geq \sum_{k=1}^n k(u_{k-1} - u_k). \end{aligned}$$

Comme la suite (u_n) décroît, la série $\sum k(u_k - u_{k-1})$ est à termes positifs, et l'inégalité ci-dessus montre que ses sommes partielles sont majorées, donc elle converge. Par différence, on en déduit que la suite de terme général $(n+1)u_n = S_n - \sum_{k=1}^n k(u_{k-1} - u_k)$ converge. On note ℓ sa limite. Si cette limite est non nulle, alors $u_n \sim \frac{\ell}{n+1} \sim \frac{\ell}{n}$, et la série $\sum u_n$ diverge, ce qui est impossible. Par suite, $\ell = 0$, et l'égalité $(n+1)u_n = nu_n + u_n$ avec (u_n) de limite nulle montre que

$$\lim(nu_n) = 0.$$

75. RMS 2013 344 X ESPCI PC

- (a) Soient deux réels a et b tels que $b > a$. Étudier la limite de la suite des réels $(b + \sqrt[3]{n})^3 - (a + \sqrt[3]{n})^3$.
 (b) Montrer que l'ensemble $E = \{\sqrt[3]{m} - \sqrt[3]{n}, (m, n) \in \mathbb{N}^2\}$ est dense dans \mathbb{R} .

SOLUTION. —

- (a) Utiliser l'identité $y^3 - x^3 = (y-x)(y^2 + xy + x^2)$.
 (b) Il s'agit de montrer que, si $a < b$ dans \mathbb{R} , alors il existe $x \in E$ tel que $a \leq x \leq b$.

On cherche des entiers naturels m et n , tels que $a + \sqrt[3]{n} < \sqrt[3]{m} < b + \sqrt[3]{n}$ ou encore $(x \mapsto x^3)$ étant strictement croissante sur \mathbb{R}) tels que

$$(a + \sqrt[3]{n})^3 \leq m \leq (b + \sqrt[3]{n})^3.$$

Or la longueur L_n de l'intervalle $](a + \sqrt[3]{n})^3, (b + \sqrt[3]{n})^3[$ tend vers $+\infty$ d'après la première question. Il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $L_{n_0} > 1$ et aussi (quitte à augmenter n_0) tel que $a + \sqrt[3]{n_0} \geq 0$. Cela assure l'existence de m_0 , entier naturel, dans l'intervalle $[(a + \sqrt[3]{n_0})^3, (b + \sqrt[3]{n_0})^3]$. Pour finir, $x_0 = \sqrt[3]{m_0} - \sqrt[3]{n_0} \in E \cap [a, b]$.

76. RMS 2024 722 Mines Ponts MP MPI

Soient (u_n) une suite décroissante de réels positifs et (v_n) la suite définie par $v_n = \frac{1}{1+n^2 u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que : si la série $\sum u_n$ converge, alors la série $\sum v_n$ diverge.

SOLUTION. — $0 \leq \frac{n}{2} u_n \leq \sum_{\frac{n}{2} \leq k \leq n} u_k$ car la suite (u_n) est positive et décroissante. Si la série $\sum u_n$ converge, alors $\sum_{\frac{n}{2} \leq k \leq n} u_k = S_n - S_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$ tend vers 0 car les sommes partielles S_n et $S_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$ convergent vers la même limite finie. D'après le théorème des gendarmes, $\frac{n}{2} u_n$ tend donc vers 0.

D'où $0 \leq nu_n$ est inférieur à 1 à partir d'un certain rang. D'où $v_n = \frac{1}{1+n^2 u_n} \geq \frac{1}{1+n}$ à partir du même rang. Donc la série $\sum v_n$ diverge.

77. UPS 20260508 Mines Ponts PSI 2025, ENS Lyon 2024

- (a) Montrer que $\int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{-x^2}}{2x}$.
- (b) Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_n + \int_{u_n}^{+\infty} e^{-t^2} dt$. Montrer que : $e^{u_{n+1}^2} - e^{u_n^2} \sim 1$.
- (c) En déduire un équivalent de u_n .

SOLUTION. —

- (a) Pour tout $x > 0$, $F(x) = \int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt$ est bien défini car l'intégrale est convergente car $e^{-t^2} \leq e^{-t}$ pour tout $t \geq 1$. On intègre par parties : $F(x) = \int_x^{+\infty} (-2te^{-t^2}) \frac{1}{2t} dt = \frac{e^{-x^2}}{2x} - \frac{1}{2} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t^2} dt$ car les fonctions $t \mapsto e^{-t^2}$ et $t \mapsto \frac{1}{2t}$ sont \mathcal{C}^1 et $\frac{e^{-t^2}}{2t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$.

Or $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t^2} dt \leq \frac{F(x)}{x^2}$ car $\frac{1}{t^2} \leq \frac{1}{x^2}$ pour tout $t \geq x$. Donc $F(x) = \frac{e^{-x^2}}{2x} + O(F(x)/x^2) = \frac{e^{-x^2}}{2x} + o(F(x))$ quand x tend vers $+\infty$. D'où l'équivalent recherché. AUTRE MÉTHODE : $\frac{e^{-t^2}}{t^2} = o(e^{-t^2})$ et e^{-t^2} ne change pas de signe et $F(x)$ est le reste d'une intégrale convergente, d'où $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t^2} dt = o(F(x))$ par intégration des relations de comparaison.

- (b) La suite (u_n) est croissante car $u_{n+1} - u_n = F(u_n) \geq 0$, elle possède donc une limite. Cette limite est $+\infty$ car ce n'est pas un réel ℓ . Par l'absurde : si $u_n \rightarrow \ell$, alors $\ell - \ell = F(\ell)$ car la fonction F est continue (car $F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt - \int_0^x e^{-t^2} dt$ et le second terme est une primitive d'une fonction continue). D'où $F(\ell) = 0$, ce qui est absurde d'après le théorème de l'intégrale nulle car la fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue et ne change pas de signe).

De $u_n \rightarrow +\infty$ et de l'équivalent de $F(x)$ quand $x \rightarrow +\infty$, on tire que $u_{n+1} - u_n \sim \frac{e^{-u_n^2}}{2u_n}$. D'où $u_{n+1} = u_n + \frac{e^{-u_n^2}}{2u_n} + o\left(\frac{e^{-u_n^2}}{2u_n}\right)$ et, en élevant au carré : $u_{n+1}^2 = u_n^2 + e^{-u_n^2} + o\left(e^{-u_n^2}\right)$. Donc $e^{u_{n+1}^2} - e^{u_n^2} \sim 1$.

- (c) Or 1 ne change pas de signe et la série $\sum 1$ diverge, d'où les sommes partielles sont équivalentes :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{u_{k+1}^2} - e^{u_k^2} \right) \sim \sum_{k=0}^{n-1} 1. \text{ D'où } e^{u_n^2} - 1 \sim n, \text{ donc } e^{u_n^2} \sim n.$$

Par suite $e^{u_n^2} = n + o(n)$, d'où $u_n^2 = \ln(n) + \ln(1 + o(1))$, $u_n = \sqrt{\ln(n) + \ln(1 + o(1))}$, donc $u_n \sim \sqrt{\ln(n)}$.

2.2 Intégrales

78. RMS 2014 1249 ENSAM PSI

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ et F sa primitive qui s'annule en 0.

- (a) Montrer que : si $\int_0^{+\infty} \frac{F(t)}{(1+t)^2} dt$ converge, alors $\int_x^{+\infty} \frac{F(t)}{(1+t)^2} dt \geq \frac{F(x)}{1+x}$ pour tout $x \geq 0$.
- (b) Montrer que les deux intégrales $\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{1+t} dt$ et $\int_0^{+\infty} \frac{F(t)}{(1+t)^2} dt$ sont de même nature et comparer leur valeur.

SOLUTION. —

- (a) On suppose que $\int_0^{+\infty} \frac{F(t)}{(1+t)^2} dt$ converge. En utilisant la croissance de F (c'est la primitive d'une fonction positive) et la convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t)^2}$, on montre que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$\int_x^{+\infty} \frac{F(t)}{(1+t)^2} dt \geq F(x) \int_x^{+\infty} \frac{dt}{(1+t)^2} = F(x) \left[-\frac{1}{1+t} \right]_x^{+\infty} = \frac{F(x)}{1+x}.$$

- (b) Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Une intégration par parties sur le segment $[0, x]$ (justifiée car les fonctions $t \mapsto F(t)$ et $t \mapsto \frac{1}{1+t}$ sont de classe \mathcal{C}^1) montre que

$$\int_0^x \frac{f(t)}{1+t} dt = \left[\frac{F(t)}{1+t} \right]_0^x + \int_0^x \frac{F(t)}{(1+t)^2} dt = \frac{F(x)}{1+x} + \int_0^x \frac{F(t)}{(1+t)^2} dt.$$

- On suppose que $\int_0^{+\infty} \frac{F(t)}{(1+t)^2} dt$ converge.

De la question précédente, on déduit que : majoré par un reste d'intégrale convergente, le quotient positif $\frac{F(x)}{1+x}$ tend vers zéro quand $x \rightarrow +\infty$.

On en déduit que $\int_0^x \frac{f(t)}{1+t} dt$ converge et a la même limite que $\int_0^x \frac{F(t)}{(1+t)^2} dt$. Donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{1+t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{F(t)}{(1+t)^2} dt.$$

- On suppose que $\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{1+t} dt$ converge. Comme $f \geq 0$, il en est de même de F , et la relation ci-dessus montre que

$$\int_0^x \frac{F(t)}{(1+t)^2} dt \leq \int_0^x \frac{f(t)}{1+t} dt \leq \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{1+t} dt.$$

La fonction $x \mapsto \int_0^x \frac{F(t)}{(1+t)^2} dt$ étant croissante et majorée, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{F(t)}{(1+t)^2} dt$ converge d'après le théorème de la limite monotone.

- En conclusion : les deux intégrales ont la même nature et, quand elles convergent, elles ont la même valeur.

79. RMS 2013 376 X ESPCI PC, RMS 2014 761 Mines Ponts PC

Mots-clés : théorème de Cesàro pour les fonctions

- (a) Soit F une fonction continue sur \mathbb{R}_+ admettant une limite finie L en $+\infty$. Montrer que $\frac{1}{x} \int_0^x F(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} L$.
- (b) Soit f une fonction continue sur \mathbb{R}_+ telle que $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ est convergente. Montrer que $\frac{1}{x} \int_0^x t f(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

SOLUTION. —

- (a) On veut montrer que $\frac{1}{x} \int_0^x F(t) dt - L = \frac{1}{x} \int_0^x [F(t) - L] dt$ tend vers zéro quand x tend vers $+\infty$. Autrement dit : que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $c \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, pour tout $x \geq c$, $|\frac{1}{x} \int_0^x [F(t) - L] dt| \leq \varepsilon$.

Soit $\varepsilon > 0$:

- d'une part, il existe $a \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, pour tout $t \geq a$, $|F(t) - L| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ car $F(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} L$ par hypothèse, d'où $\frac{1}{x} \int_a^x |F(t) - L| dt \leq \frac{x-a}{x} \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2}$;
- d'autre part, il existe $b \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, pour tout $x \geq b$, $\frac{1}{x} \int_0^a |F(t) - L| dt \leq \frac{\varepsilon}{2}$ car $\frac{1}{x} \int_0^a |F(t) - L| dt$ tend vers zéro quand x tend vers $+\infty$.

Donc, en posant $c = \max(a, b)$, on a montré que, pour tout $x \geq c$,

$$\frac{1}{x} \int_0^x |F(t) - L| dt = \frac{1}{x} \int_0^a |F(t) - L| dt + \frac{1}{x} \int_a^x |F(t) - L| dt \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Et donc, par l'inégalité triangulaire, $|\frac{1}{x} \int_0^x [F(t) - L] dt| \leq \frac{1}{x} \int_0^x |F(t) - L| dt \leq \varepsilon$ pour tout $x \geq c$.

- (b) Soit F la primitive nulle en zéro de f . Par hypothèse, F possède une limite finie en $+\infty$, qu'on note L et qui vaut $\int_0^{+\infty} f(t) dt$. Une intégration par parties conduit à

$$\frac{1}{x} \int_0^x t f(t) dt = \frac{1}{x} \left([tF(t)]_0^x - \int_0^x F(t) dt \right) = F(x) - \frac{1}{x} \int_0^x F(t) dt.$$

Comme $F(x)$ tend vers L quand x tend vers $+\infty$, la moyenne $\frac{1}{x} \int_0^x F(t) dt$ converge vers un réel L d'après la question précédente. La différence ci-dessus tend donc vers $L - L = 0$ quand x tend vers $+\infty$.

REMARQUE — La première question est une version pour les intégrales du théorème de Cesàro pour les suites, qui affirme que : si une suite (u_n) tend vers un réel L , alors la moyenne $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^n u_k$ tend aussi vers L . Et qui se démontre de la même manière. Soit $\varepsilon > 0$:

- d'une part, $\exists a \in \mathbb{N}^*, \forall n \geq a, |u_n - L| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ car $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} L$ par hypothèse, d'où $\frac{1}{n} \sum_{k=a}^n |u_k - L| \leq \frac{n-a}{n} \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2}$;

- d'autre part, $\exists b \in \mathbb{N}^*, \forall n \geq b, \frac{1}{n} \sum_{k=0}^a |u_k - L| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ car $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^a |u_k - L|$ tend vers zéro quand n tend vers ∞ .

Donc, en posant $c = \max(a, b)$, on a montré que, pour tout $n \geq c$,

$$\left| \frac{\sum_{k=0}^n u_k}{n} - L \right| = \frac{1}{n} \left| \sum_{k=0}^n (u_k - L) \right| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n |u_k - L| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

80. RMS 2011 1140 Télécom Sud Paris PC, RMS 2015 1003 CCP PSI

- (a) Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} [x] e^{-x} dx$ est convergente et qu'elle vaut $\frac{1}{e-1}$.
- (b) Existence et calcul de $\int_0^{+\infty} x e^{-[x]} dx$.

SOLUTION. —

- (a) On note f la fonction $x \in [0, +\infty[\mapsto [x]e^{-x}$. La continuité par morceaux de f et la limite $\lim_{+\infty} x^2 f(x) = 0$ montrent que f est intégrable sur $[0, +\infty[$. On calcule ensuite $\int_0^n f(x) dx$ pour $n \in \mathbb{N}$, en effectuant le changement d'indice $j = k + 1$:

$$\int_0^n f(x) dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} ke^{-x} dx = \sum_{k=0}^{n-1} k \left(e^{-k} - e^{-(k+1)} \right) = \sum_{k=0}^{n-1} ke^{-k} - \sum_{j=1}^n (j-1)e^{-j} = \sum_{k=1}^{n-1} e^{-k} - (n-1)e^{-n}.$$

Comme $\int_0^{+\infty} f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n f(x) dx$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n-1)e^{-n} = 0$, on obtient

$$\int_0^{+\infty} [x]e^{-x} dx = \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-k} = \frac{e^{-1}}{1 - e^{-1}} = \frac{1}{e-1}.$$

- (b) La fonction $f: x \mapsto xe^{-[x]}$ est continue par morceaux sur \mathbb{R}_+ et $0 \leq f(x) \leq xe^{-x+1} = o(e^{-x/2})$ quand $x \rightarrow +\infty$, donc l'intégrale étudiée converge. On a

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_n^{n+1} xe^{-[x]} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_n^{n+1} xe^{-n} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n} \left[\frac{x^2}{2} \right]_n^{n+1} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1)e^{-n}.$$

Posons $g: x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n+1} = \frac{x}{1-x^2}$. Cette fonction est la somme d'une série entière de rayon de convergence 1. Or on peut dériver terme à terme une série entière sans changer son rayon de convergence. D'où : $\forall x \in]-1, 1[$, $g'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1)x^{2n} = \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}$, donc (parce que $e^{-1} \in]-1, +1[$) : $\sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1)e^{-n} = g'(e^{-1/2}) = \frac{1+e^{-1}}{(1-e^{-1})^2}$. On conclut que

$$\int_0^{+\infty} xe^{-[x]} dx = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1)e^{-n} = \frac{1}{2} \frac{1+e^{-1}}{(1-e^{-1})^2}.$$

Un exercice en rapport : RMS 2011 1140 Télécom Sud Paris PC

Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} [x]e^{-x} dx$ est convergente et qu'elle vaut $\frac{1}{e-1}$.

SOLUTION. — On note f la fonction $x \in [0, +\infty[\mapsto [x]e^{-x}$. La continuité par morceaux de f et la limite $\lim_{+\infty} x^2 f(x) = 0$ montrent que f est intégrable sur $[0, +\infty[$. On calcule ensuite $\int_0^n f(x) dx$ pour $n \in \mathbb{N}$, en effectuant le changement d'indice $j = k + 1$:

$$\int_0^n f(x) dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} ke^{-x} dx = \sum_{k=0}^{n-1} k \left(e^{-k} - e^{-(k+1)} \right) = \sum_{k=0}^{n-1} ke^{-k} - \sum_{j=1}^n (j-1)e^{-j} = \sum_{k=1}^{n-1} e^{-k} - (n-1)e^{-n}.$$

Comme $\int_0^{+\infty} f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n f(x) dx$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n-1)e^{-n} = 0$, on obtient

$$\int_0^{+\infty} [x]e^{-x} dx = \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-k} = \frac{e^{-1}}{1 - e^{-1}} = \frac{1}{e-1}.$$

81. RMS 2014 781 Mines Ponts PC & RMS 2016 852 Centrale PC

Soit $F: x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t} dt$.

- (a) Montrer que la fonction F est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* .
 (b) Former une équation différentielle vérifiée par F et en déduire la limite de F en 0^+ .
 (c) Déterminer un équivalent de F en $+\infty$.

SOLUTION. — On pose $f: (x, t) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \mapsto \frac{e^{-t}}{x+t}$.

- (a) Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. On applique le théorème de dérivation sous le signe intégral en utilisant la domination

$$\forall (x, t) \in [a, +\infty[\times \mathbb{R}_+^*, \quad \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| = \left| (-1) \frac{e^{-t}}{(x+t)^2} \right| \leq \varphi(t) := \frac{e^{-t}}{(a+t)^2}.$$

sans oublier auparavant de montrer que, pour chaque x , la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable. On en déduit que F est de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$, donc sur \mathbb{R}_+^* .

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt = - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2} dt.$$

- (b) $F'(x) = -\frac{1}{x} + F(x)$ en intégrant par parties. D'où $F'(x) - F(x) = -\frac{1}{x}$. On résout cette équation différentielle en faisant varier la constante et on trouve ainsi que : $F(x) = \left(K - \int_1^x \frac{e^{-t}}{t} dt\right) e^x$, où K est une constante. Or $\int_1^x \frac{e^{-t}}{t} dt \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -\infty$.
Donc $F(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$.
- (c) $\frac{1}{x} - F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+t}\right) dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} \frac{t}{x(x+t)} dt = o\left(\frac{1}{x}\right)$ quand $x \rightarrow +\infty$
car $x \int_0^{+\infty} e^{-t} \frac{t}{x(x+t)} dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} \frac{t}{x+t} dt \leq \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} te^{-t} dt$, où l'intégrale $\int_0^{+\infty} te^{-t} dt$ est bien convergente.

82. RMS 2013 917 Centrale PC

Soit $F: x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{te^{-t}}{t+x} dt$.

- (a) Montrer que F est définie et continue sur \mathbb{R}_+ , dérivable sur \mathbb{R}_+^* .
(b) Calculer les intégrales $\int_0^{+\infty} te^{-t} dt$ et $\int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} dt$. Étudier la limite de $1 - xF(x)$ quand x tend vers $+\infty$. Conclure.

SOLUTION. —

- (a) Soit, pour tout $(x, t) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, $f(x, t) = \frac{te^{-t}}{t+x}$. On applique le théorème de continuité sous le signe intégral en utilisant la domination $|f(x, t)| \leq e^{-t}$. On conclut que F est définie et continue sur \mathbb{R}_+ .

Soit $a > 0$. On applique le théorème de dérivation sous le signe intégral en utilisant la domination

$$\forall (x, t) \in [a, +\infty[\times \mathbb{R}_+^*, \quad \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| = \left| (-1) \frac{te^{-t}}{(x+t)^2} \right| \leq \left| \frac{te^{-t}}{(a+t)^2} \right| \leq \varphi(t) = \frac{te^{-t}}{a^2}.$$

Cette fonction φ est bien intégrable sur $[0, +\infty[$ car $te^{-t} = te^{-t/2}e^{-t/2} = o(e^{-t/2})$ quand t tend vers $+\infty$.

On en déduit que F est de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$, donc sur \mathbb{R}_+^* .

- (b) $\int_0^{+\infty} te^{-t} dt = 1$ et $\int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} dt = 2$.
 $1 - xF(x) = \int_0^{+\infty} te^{-t} \left(1 - \frac{x}{t+x}\right) dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} \frac{t^2}{t+x} dt$. D'où $0 \leq 1 - xF(x) \leq \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} dt$. Donc $0 \leq 1 - xF(x) \leq \frac{2}{x}$. D'où $1 - xF(x) \rightarrow 0$ quand x tend vers $+\infty$. Donc $F(x) \sim \frac{1}{x}$ quand x tend vers $+\infty$.

83. RMS 2016 795 Centrale PSI

Mots-clés : transformée de Laplace

On considère la fonction $F: x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-xt} \cdot \frac{\text{sh } t}{t} dt$.

- (a) Déterminer l'ensemble de définition de F .
(b) Déterminer la limite de F en $+\infty$.

SOLUTION. —

- (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto e^{-xt} \cdot \frac{\text{sh } t}{t}$ est continue sur \mathbb{R}_+^* , positive, et $\frac{\text{sh } t}{t} \rightarrow 1$ quand $t \rightarrow 0$ donc l'intégrale est faussement impropre en 0. Et comme $\text{sh } t \sim \frac{e^t}{2}$ quand $t \rightarrow +\infty$, on obtient

$$e^{-xt} \frac{\text{sh } t}{t} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{(1-x)t}}{2t}.$$

Lorsque $x > 1$, on a donc $e^{-xt} \frac{\text{sh } t}{t} = O_{+\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc la fonction est intégrable. Lorsque $x \leq 1$, on a au contraire $\frac{1}{t} = O_{+\infty}\left(e^{-xt} \frac{\text{sh } t}{t}\right)$ et comme $t \mapsto \frac{1}{t}$ n'est pas intégrable, alors l'intégrale diverge. Finalement F est définie sur

$$D_F =]1; +\infty[.$$

- (b) Pour $x > a > 1$, on peut par exemple encadrer l'intégrande par $\forall t > 0, 0 \leq e^{-xt} \frac{\text{sh } t}{t} = e^{-at} \frac{\text{sh } t}{t} e^{-(x-a)t} \leq M e^{-(x-a)t}$, où $M = \sup\left(e^{-at} \frac{\text{sh } t}{t}, t \in \mathbb{R}_+^*\right)$. En effet la fonction $t \mapsto e^{-at} \frac{\text{sh } t}{t}$ est bornée, puisque continue et de limites finies en 0 (1) et en $+\infty$ (0).

En intégrant, il vient $0 \leq F(x) \leq M \int_0^{+\infty} e^{-(x-a)t} dt = \frac{M}{x-a}$. Par le théorème des gendarmes,

$$F(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

AUTRE MÉTHODE — Soit une suite (u_n) tendant vers $+\infty$: d'une part, $e^{-u_n t} \frac{\text{sh } t}{t} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ pour tout $t \in]0, +\infty[$; d'autre part, $u_n \geq 2$ à partir d'un certain rang, d'où $e^{-u_n t} \frac{\text{sh } t}{t} \leq e^{-2t} \frac{\text{sh } t}{t}$. Or l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-2t} \frac{\text{sh } t}{t} dt$ est convergente (car on a montré ci-dessus que $F(2)$ est défini).

Donc $\int_0^{+\infty} e^{-u_n t} \frac{\text{sh } t}{t} dt$ tend vers zéro d'après le théorème de la convergence dominée.

Ceci est vrai pour toute suite (u_n) tendant vers $+\infty$, donc $\int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{\text{sh } t}{t} dt$ tend vers zéro quand x tend vers $+\infty$ d'après la caractérisation séquentielle de la limite.

2.3 Suites & séries de fonctions

84. CCP PSI 2021

- (a) Prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale $J_n = \int_0^{+\infty} \frac{n^{1/3} \sin\left(\frac{t}{n^{1/3}}\right)}{1+t^3} dt$ est convergente.
- (b) Montrer que la suite des réels J_n converge vers le réel $K = \int_0^{+\infty} \frac{t}{1+t^3} dt$.
- (c) À l'aide d'un changement de variable, prouver que $K = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^3} dt$ et en déduire la valeur du réel K .

SOLUTION. — Soit $f_n(t) = \frac{n^{1/3} \sin\left(\frac{t}{n^{1/3}}\right)}{1+t^3}$.

- (a) $|f_n(t)| \leq \frac{n^{1/3}}{1+t^3} \sim \frac{n^{1/3}}{t^3}$ quand t tend vers $+\infty$. Donc l'intégrale J_n est convergente d'après le critère de Riemann.
- (b) Chaque fonction f_n est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$ et la suite (f_n) converge simplement vers la fonction continue par morceaux $f : t \mapsto \frac{t}{1+t^3}$ car $\sin\left(\frac{t}{n^{1/3}}\right) \sim \frac{t}{n^{1/3}}$ quand n tend vers ∞ . De plus, pour tout $t \in [0, +\infty[$, $|f_n(t)| \leq \frac{t}{1+t^3}$ car $|\sin x| \leq x$ pour tout réel x positif. D'où $\int_0^{+\infty} f_n(t) dt$ tend vers $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ d'après le théorème de la convergence dominée. Donc la suite des réels J_n converge vers le réel K .
- (c) Le changement de variable $t \mapsto \frac{1}{t}$, qui est bien \mathcal{C}^1 et strictement monotone sur $]0, +\infty[$, prouve que $K = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^3} dt$. Par suite $2K = \int_0^{+\infty} \frac{1+t}{1+t^3} dt$. Or $\frac{1+t}{1+t^3} = \frac{1}{t^2-t+1}$ et $t^2 - t + 1 = (t - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4} [1 + \frac{4}{3}(t - \frac{1}{2})^2]$. On se ramène, par le changement de variable $t \mapsto \frac{2}{\sqrt{3}}(t - \frac{1}{2})$, qui est bien \mathcal{C}^1 et strictement monotone sur $]0, +\infty[$, à un calcul d'arctangente pour montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2-t+1} dt = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$.

85. RMS 2013 1005 CCP PSI, RMS 2008 982 TPE PSI, RMS 2013 1005 CCP PSI, RMS 2015 748 Mines Ponts PC & RMS 2016 849 Centrale PC

Mots-clés : primitives itérées

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$, $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de fonctions définie par $f_0 = f$, et, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [a, b]$, $f_{n+1}(x) = \int_a^x f_n(t) dt$. Montrer que la série de fonctions de terme général f_n converge normalement sur $[a, b]$ et déterminer sa somme $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ en résolvant une équation différentielle.

SOLUTION. —

- Comme f est continue sur $[a, b]$, f est bornée. Posons $M = \|f\|_\infty$. Pour $x \in [a, b]$, $|f_1(x)| \leq \int_a^x M dt = M(x - a)$, donc $|f_2(x)| \leq \int_a^x M(t - a) dt = \frac{M}{2}(x - a)^2$, et par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f_n(x)| \leq \frac{M}{n!}(x - a)^n$.

Il en résulte $\|f_n\|_\infty \leq \frac{M}{n!}(b - a)^n$ et, comme $\sum \frac{M}{n!}(b - a)^n$ converge, la série $\sum f_n$ converge normalement sur $[a, b]$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_{n+1} : x \mapsto \int_a^x f_n(t) dt$ est de classe \mathcal{C}^1 puisque f_n est continue, et $f'_{n+1} = f_n$. L'étude faite ci-dessus montre que $\sum f'_{n+1}$ est normalement convergente sur $[a, b]$ et que $\sum f_{n+1}$ est simplement convergente. On en déduit que $T := \sum_{n=0}^{+\infty} f_{n+1} = S - f$ est de classe \mathcal{C}^1 et que $T' = (S - f)' = S = T + f$ sur le segment $[a, b]$
- Il s'agit de résoudre l'équation différentielle

$$T' - T = f$$

avec la condition initiale $T(a) = 0$, puisque $f_n(a) = 0$ pour tout $n \geq 1$. Les solutions de l'équation différentielle sont de la forme $x \mapsto e^x (\int_a^x e^{-t} f(t) dt + c)$, ou c est une constante réelle. La condition initiale donne $c = 0$. Finalement,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = f(x) + T(x) = f(x) + e^x \int_a^x e^{-t} f(t) dt.$$

86. RMS 2009 1050 Centrale PC

Quel est l'ensemble de définition de $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^n}$? Cette fonction est-elle continue?

SOLUTION. — Soit $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$: si $x = -1$, alors $f_n(x)$ n'est pas défini pour tout n . Si $x = 1$, alors $f_n(x) = \frac{1}{2}$ ne tend pas vers 0, d'où la série numérique $\sum f_n(x)$ diverge grossièrement. Si $|x| > 1$, alors $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1 \neq 0$, d'où la série numérique $\sum f_n(x)$ diverge grossièrement. Si $|x| < 1$, alors $|f_n(x)| \sim |x|^n$, or la série numérique $\sum |x|^n$ converge car c'est une série géométrique de raison $|x| \in]-1, +1[$, d'où la série numérique $\sum f_n(x)$ converge absolument. En conclusion, le réel $f(x)$ est défini si, et seulement si, $x \in]-1, +1[$.

Soit $a \in]0, +1[$: pour tout $x \in]-a, +a[$, $|f_n(x)| \leq \frac{|x|^n}{1-|x|^n} \leq \frac{a^n}{1-a^n}$. Or la série numérique $\sum \frac{a^n}{1-a^n}$ converge car $\frac{a^n}{1-a^n} \sim a^n$. Ceci montre que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $[-a, a]$, Or chaque f_n est continue sur $[-a, a]$. D'où f est continue sur $[-a, a]$ pour tout a tel que $0 < a < 1$, donc sur $] - 1, 1[$.

87. RMS 2016 937 CCP PSI

Montrer que $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2(1+x^{2n})}$ est défini pour tout réel x et que, pour tout $x \neq 0$, $S(x) = S(\frac{1}{x})$. Étudier la limite de S en $+\infty$.

SOLUTION. —

Soit $f_n(x) = \frac{x^n}{n^2(1+x^{2n})}$. Si $x = 0$, alors $f_n(x) = 0$. Si $x \neq 0$, alors $\frac{x^n}{1+x^{2n}} = \frac{1}{x^n+x^{-n}}$. Or, $\forall t \in]0, +\infty[$, $t + \frac{1}{t} \geq 2$, donc $|\frac{1}{x^n+x^{-n}}| \leq \frac{1}{2}$ et $|f_n(x)| \leq \frac{1}{2n^2}$ (valable également pour $x = 0$) ce qui prouve que la série converge normalement sur \mathbb{R} .

De $\frac{1}{x^n+x^{-n}}$, on tire que $f_n(\frac{1}{x}) = f_n(x)$ et donc que $S(\frac{1}{x}) = S(x)$ pour tout $x \neq 0$.

On a déjà établi la convergence normale sur \mathbb{R} , et comme les f_n sont continues, S l'est aussi.

En particulier, S est continue en 0, d'où $S(x) \rightarrow S(0) = 0$ quand $x \rightarrow 0^+$. Or $S(\frac{1}{x}) = S(x)$, donc $S(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow +\infty$.

AUTRE MÉTHODE : L'équivalent $f_n(x) \sim \frac{1}{n^2 x^n} \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow +\infty$, et la convergence normale de la série montrent, avec le théorème d'interversion somme-limite, que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x) = 0.$$

88. RMS 2016 513 Mines Ponts PSI

Soit $S : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$.

- Montrer que S est définie et de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* . Étudier le sens de variation de S .
- Étudier les limites de S en 0 et en $+\infty$.
- Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $xS(x) - S(x+1) = \frac{1}{e}$.
- Déterminer un équivalent de S en 0^+ et en $+\infty$.

SOLUTION. — Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $f_n : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$.

- Fixons $x \geq 0$: la série numérique $\sum f_n(x)$ est absolument convergente car $|\frac{(-1)^n}{n!(x+n)}| \leq \frac{1}{n!}$ et la série $\sum \frac{1}{n!}$ converge. Les f_n sont de classe \mathcal{C}^1 et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{n!(x+n)^2}$. Soit $a > 0$:

$$\forall x \in [a, +\infty[, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad |f'_n(x)| \leq \frac{1}{n!(a+n)^2},$$

terme général d'une série convergente. Donc la série de fonctions $\sum f'_n$ converge normalement sur $[a, +\infty[$. Il résulte du théorème de dérivation terme à terme que S est de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$, donc sur \mathbb{R}_+^* . Et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!(x+n)^2}.$$

Cette série vérifie le critère spécial des séries alternées, donc la somme est du signe de son premier terme, à savoir négatif. Donc S est décroissante sur \mathbb{R}_+^* .

- Du critère spécial des séries alternées résulte l'encadrement de la somme par deux sommes partielles successives :

$$\forall x \geq 0, \quad \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \leq S(x) \leq \frac{1}{x}.$$

D'où $\lim_{0^+} S = +\infty$ et $\lim_{+\infty} S = 0$

REMARQUE : on en tire aussi que $S(x) \sim \frac{1}{x}$ ($x \rightarrow 0^+$) car $xS(x) \rightarrow 1$ ($x \rightarrow 0^+$), ce qui est demandé à la dernière question.

AUTRE MÉTHODE : $S(x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ et $\forall x > 0$, $\forall n \geq 1$, $|f_n(x)| \leq \frac{1}{nn!}$, donc $\sum_{n \geq 1} f_n$ est normalement convergente sur \mathbb{R}_+^* , donc, d'après le théorème de la double limite :

- d'une part, sa somme tend vers la limite finie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{nn!}$ quand x tend vers 0^+ et il en résulte que $\lim_{0^+} S = +\infty$;
- d'autre part, $\lim_{+\infty} S = 0$.

(c)

$$\begin{aligned} xS(x) - S(x+1) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x}{n!(x+n)} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+1+n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x}{n!(x+n)} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!(x+n)} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n (x+n)}{n!(x+n)} = \frac{1}{e}. \end{aligned}$$

(d) De $xS(x) - S(x+1) = \frac{1}{e}$, on tire que :

- d'une part, $xS(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{e} + S(1)$ par continuité de S en 1, or $S(1) = 1 - \frac{1}{e}$, d'où $xS(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 1$, donc $S(x) \sim \frac{1}{x}$ ($x \rightarrow 0^+$);
- d'autre part, $xS(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e} + 0$ car $\lim_{+\infty} S = 0$, donc $S(x) \sim \frac{1}{xe}$ ($x \rightarrow +\infty$).

89. RMS 2013 606 Mines Ponts PSI, RMS 2016 512 Mines Ponts PSI & RMS 2016 583 Mines Ponts PC

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{2x}{x^2+n^2}$. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ est définie sur \mathbb{R} . Étudier la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$. Montrer que la fonction f est continue mais que la série de fonctions $\sum f_n$ ne converge pas uniformément sur \mathbb{R} .

SOLUTION. —

Les fonctions f_n étant impaires, f l'est aussi.

- Pour $x = 0$, la série est nulle, donc convergente.

Pour $t \neq 0$, on a $|\frac{2t}{n^2+t^2}| \sim \frac{2|t|}{n^2}$ quand $n \rightarrow +\infty$, qui est le terme général d'une série convergente, donc la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur \mathbb{R} . La fonction f est donc définie sur \mathbb{R} .

- On fixe $x \in \mathbb{R}_+^*$. La fonction $\varphi_x : t \in [1, +\infty[\mapsto \frac{2x}{x^2+t^2}$ est continue et décroissante, d'où, en comparant série et intégrale : $\int_1^{+\infty} \varphi_x(t) dt \leq f(x) \leq \int_0^{+\infty} \varphi_x(t) dt$, soit

$$\pi - 2 \arctan \left(\frac{1}{x} \right) = 2 \left[\arctan \left(\frac{t}{x} \right) \right]_{t=1}^{+\infty} \leq f(x) \leq 2 \left[\arctan \left(\frac{t}{x} \right) \right]_{t=0}^{+\infty} = \pi.$$

En passant à la limite quand x tend vers l'infini, on obtient $\lim_{+\infty} f = \pi$ et, par imparité, $\lim_{-\infty} f = -\pi$.

- Pour tout $x \in [a, b] \subset \mathbb{R}$, en posant $c = \max\{|a|, |b|\}$, on a : $|\frac{2x}{n^2+x^2}| \leq \frac{2c}{n^2}$, la série de fonctions converge donc normalement sur tout segment inclus dans \mathbb{R} . Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur \mathbb{R} , on en déduit que f est continue sur \mathbb{R} .
- Mais cette série ne converge pas uniformément sur \mathbb{R}_+^* : par comparaison à l'intégrale, $R_n(x) \geq \int_{n+1}^{+\infty} \frac{x}{x^2+t^2} dt = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{n+1}{x}$, donc

$$\|R_n\|_\infty \geq \sup_{x \in \mathbb{R}_+^*} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{n+1}{x} \right) = \frac{\pi}{2} \not\rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow +\infty.$$

AUTRE MÉTHODE : Chaque terme tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$. Si la convergence était uniforme, alors le théorème de la double limite permettrait de conclure que $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$. Or on a prouvé que $f(x)$ tendait vers π . C'est absurde. Donc la convergence n'est pas uniforme.

90. RMS 2016 371 X ESPCI PC

Soit, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{-n^2 x}$.

- (a) Montrer que la fonction $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est définie et continue sur $]0, +\infty[$.
- (b) Étudier la limite de f en $+\infty$.
- (c) Montrer que $\lim_{0^+} f = +\infty$. La série $\sum f_n$ converge-t-elle uniformément sur $]0, +\infty[$?

SOLUTION. —

- (a) Si $x > 0$, alors $f_n(x) \leq e^{-n^2 x}$ et la série géométrique $\sum e^{-n^2 x}$ converge car sa raison e^{-x} appartient à $] -1, +1[$. Donc la série $\sum f_n(x)$ converge. Finalement,

Soit $a > 0$: pour tout $x \in [a, +\infty[$, $0 \leq f_n(x) \leq f_n(a)$ car f_n est décroissante, ce qui prouve la convergence normale sur $[a, +\infty[$. Or chaque f_n est continue sur $[a, +\infty[$, d'où f est continue sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$, donc continue sur $]0, +\infty[$.

- (b) La série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[1, +\infty[$. Comme $\lim_{+\infty} f_n = 0$ si $n \geq 1$ et $\lim_{+\infty} f_0 = 1$, le théorème de la double limite prouve que $\lim_{+\infty} f = 1$.

- (c) (Voir aussi la question *c* de l'exercice 91.) La fonction f est décroissante sur $]0, +\infty[$ (car chaque f_n l'est), le théorème de la limite monotone garantit donc l'existence de $\lim_{0^+} f$.

La positivité des f_n montre que $f \geq \sum_{k=0}^n f_k$. Comme on sait désormais que les deux membres de l'inégalité ont une limite en 0^+ , on peut écrire que

$$\lim_{0^+} f \geq \sum_{k=0}^n \lim_{0^+} f_k = \sum_{k=0}^n 1 = n + 1.$$

Ceci étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, on en déduit que $\lim_{0^+} f = +\infty$.

Pour chaque n , $\lim_{0^+} f_n = 1$. S'il y avait convergence uniforme sur $]0, +\infty[$, le théorème de la double limite conclurait que la série $\sum 1$ converge. C'est absurde.

91. RMS 2016 938 CCP PSI & RMS 2015 666 Mines Ponts PSI

On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \ln(1 + e^{-nx})$.

- (a) Montrer que f est définie et continue sur $]0, +\infty[$.
 (b) Étudier la limite de f en $+\infty$.
 (c) Étudier la limite de f en 0^+ . (On pourra vérifier que $\forall t \in [0, 1], \ln(1 + t) \geq \frac{t}{2}$.)

SOLUTION. —

- (a) Pour tout $x > 0$, $u_n(x) = \ln(1 + e^{-nx}) \sim e^{-nx}$ quand $n \rightarrow +\infty$ qui est le terme général d'une série géométrique convergente, d'où f est définie sur $]0, +\infty[$.

Soit $a > 0$. Pour tout $x \in [a, +\infty[$, $0 \leq u_n(x) \leq u_n(a)$ donc $\sum u_n$ converge normalement sur $[a, +\infty[$. Comme les u_n sont continues, f est continue sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$, donc sur $]0, +\infty[$.

- (b) On a $u_0(x) = \ln 2$ et pour $n \geq 1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} u_n(x) = 0$. Comme $\sum u_n$ converge normalement sur $[1, +\infty[$, on peut intervertir :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ln 2.$$

- (c) (Voir aussi la question *c* de l'exercice 90.) Pour la limite en 0, c'est un peu plus compliqué : les u_n sont décroissantes donc f l'est aussi donc f admet une limite ℓ en 0, finie ou $+\infty$. On établit que $\forall t \in [0, 1], \ln(1 + t) \geq \frac{t}{2}$ à l'aide du théorème des accroissements finis ou par une étude des variations. Pour $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, on en déduit que

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n \ln(1 + e^{-kx}) \geq \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n e^{-kx} = \frac{1}{2} \frac{1 - e^{-(n+1)x}}{1 - e^{-x}} \xrightarrow{x \rightarrow 0} n + 1.$$

L'inégalité large $f(x) \geq S_n(x)$ passe à la limite, d'où : $\ell \geq n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc

$$\ell = +\infty.$$

92. RMS 2008 987 ENSAM PSI

Soient deux fonctions $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ et g continue et intégrable sur \mathbb{R}_+ . Montrer que :

$$n \int_0^1 f(t)g(nt) dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(0) \int_0^{+\infty} g(t) dt.$$

SOLUTION. — Soit $I_n = n \int_0^1 f(t)g(nt) dt$. Le changement de variable $u = nt$ montre que $I_n = \int_0^n f(\frac{u}{n})g(u) du$. On définit sur \mathbb{R}_+ une suite de fonctions (h_n) par

$$h_n(u) = \begin{cases} f(\frac{u}{n})g(u) & \text{si } 0 \leq u \leq n, \\ 0 & \text{si } n < u. \end{cases}$$

La suite (h_n) converge simplement sur \mathbb{R}_+ vers la fonction continue $f(0)g$. Comme f est continue sur le segment $[0, 1]$, il existe M tel que $\forall t \in [0, 1], |f(t)| \leq M$. La suite h_n vérifie alors l'hypothèse de domination $|h_n| \leq M|g|$ avec g intégrable, et le théorème de convergence dominée montre que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = f(0) \int_0^{+\infty} g(t) dt.$$

93. RMS 2015 1013 CCP PSI

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $U_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} dx$. Montrer que $U_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln 2}{n}$.

SOLUTION. — Commençons, pour $n \in \mathbb{N}^*$, par un changement de variable sur $nU_n = \int_0^1 \frac{nx^n}{1+x^n} dx$: on pose $u = x^n$, $du = nx^{n-1} dx$, $x \mapsto x^n$ est \mathcal{C}^1 de $[0, 1]$ vers $[0, 1]$. Alors

$$nU_n = \int_0^1 \frac{\sqrt[n]{u}}{1+u} du.$$

Appliquons le théorème de convergence dominée à nU_n .

- On a la convergence simple de la suite $(f_n : u \mapsto \frac{\sqrt[n]{u}}{1+u})$ vers la fonction cpm $f : u \mapsto \frac{1}{1+u}$ si $u \in]0, 1]$ et 0 si $u = 0$.

- La domination suivante est satisfaite : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall u \in [0, 1]$, $|f_n(u)| \leq \frac{1}{1+u}$ avec $u \mapsto \frac{1}{1+u}$ continue, ≥ 0 , et intégrable sur $[0, 1]$.

Par théorème de convergence dominée, on a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} nU_n = \int_0^1 f(u) du = [\ln(1+u)]_0^1 = \ln 2$, et on en déduit que

$$U_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln 2}{n}.$$

AUTRE MÉTHODE — Commençons, pour $n \in \mathbb{N}^*$, par une intégration par parties : $U_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} dx = \frac{1}{n} \int_0^1 x \frac{nx^{n-1}}{1+x^n} dx = \frac{1}{n} [x \ln(1+x^n)]_0^1 - \frac{1}{n} \int_0^1 \ln(1+x^n) dx = \frac{\ln 2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ car $0 \leq \ln(1+x^n) \leq x^n$, d'où $0 \leq \int_0^1 \ln(1+x^n) dx \leq \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$.

94. RMS 2010 849 Centrale PSI

(a) Étudier la convergence de $\int_0^1 \frac{\ln x}{x^2-1} dx$.

(b) Montrer que $\int_0^1 \frac{\ln x}{x^2-1} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

SOLUTION. — Pour tout $x \in]0, 1[$, on pose $f(x) = \frac{\ln x}{x^2-1}$.

(a) L'équivalent entre fonctions positives $f(x) \sim -\ln x$ quand x tend vers zéro montre que f est intégrable sur $]0, \frac{1}{2}[$. Par ailleurs, $\lim_1 f = \frac{1}{2}$ car $\ln x \sim x-1$ quand x tend vers 1 : la fonction f est prolongeable par continuité en 1, donc elle est intégrable sur $[\frac{1}{2}, 1[$. Finalement, f est intégrable sur $]0, 1[$.

(b) On sait que $\forall x \in]0, 1[$, $f(x) = -\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n} \ln x$. On pose $f_n(x) = x^{2n} \ln x$ pour tout $x \in]0, 1[$. Comme $|f_n| \leq |\ln|$ sur $]0, 1[$ et comme \ln est intégrable sur $]0, 1[$, on en déduit que f_n est intégrable. On vérifie ensuite que la série de terme général $\int_0^1 |f_n(x)| dx$ converge pour pouvoir appliquer le théorème d'intégration terme à terme sur un intervalle quelconque.

Une intégration par parties (qu'il faudrait écrire sur $[\varepsilon, 1]$ avec $\varepsilon > 0$, puis passer à la limite quand ε tend vers zéro), donne

$$\int_0^1 |x^{2n} \ln x| dx = -\int_0^1 x^{2n} \ln x dx = -\left[\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \ln x \right]_0^1 + \frac{1}{2n+1} \int_0^1 x^{2n+1} \frac{dx}{x} = \frac{1}{2n+1} \int_0^1 x^{2n} dx = \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

La série de terme général $\frac{1}{(2n+1)^2}$ étant convergente, on en déduit que

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{x^2-1} dx = -\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) dx = -\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

95. RMS 2016 951 TPE PSI

Après avoir justifié l'existence de l'intégrale, montrer que $\int_0^{+\infty} e^{-x} \cos \sqrt{x} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{n!}{(2n)!}$.

SOLUTION. — Pour tout $x \geq 0$, $|e^{-x} \cos \sqrt{x}| \leq e^{-x}$ et $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$ converge, d'où la convergence absolue de l'intégrale étudiée. De plus, $\cos \sqrt{x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^n$ donc

$$e^{-x} \cos \sqrt{x} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$$

avec $u_n(x) = \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^n e^{-x}$. On montre par récurrence avec une intégration par partie que $I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = n!$ donc $\int_0^{+\infty} |u_n(x)| dx = \frac{n!}{(2n)!}$, qui est le terme général d'une série convergente, par la règle de D'ALEMBERT. On en déduit, avec le théorème d'intégration terme à terme sur un intervalle quelconque que

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} \cos \sqrt{x} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} u_n(x) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{n!}{(2n)!}.$$

96. RMS 2011 1150, CCP PC, RMS 2014 1262 Écoles des Mines PSI

Justifier l'existence de $I = \int_0^1 \frac{\ln t \ln(1-t)}{t} dt$. Montrer que $I = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$.

SOLUTION. — Pour tout $t \in]0, 1[$, on pose $f(t) = \frac{\ln t \ln(1-t)}{t}$. Comme $f(t) \sim -\ln t$ quand t tend vers zéro, la règle sur les équivalents de fonctions à signe fixe montre que f est intégrable sur $]0, \frac{1}{2}[$. Comme $f(t) \sim (t-1) \ln(1-t)$ tend vers 0 quand t tend vers 1, on en déduit que f est prolongeable par continuité en 1, donc intégrable sur $[\frac{1}{2}, 1[$. Par suite, l'intégrale I converge.

Le développement en série entière du logarithme montre que, pour tout $t \in]0, 1[$, on a $f(t) = -\ln t \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{n-1}}{n}$. On pose $f_n : t \in]0, 1[\mapsto -\ln t \frac{t^{n-1}}{n}$ de sorte que la série de fonctions continues par morceaux $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement vers f sur $]0, 1[$. De plus chaque f_n est continue et intégrable sur $]0, 1[$: c'est clair pour $f_1 = -\ln$ qui est intégrable d'après le cours, et cela résulte de l'égalité $\lim_0 f_n = 0$ pour $n \geq 2$. Par ailleurs, $f_n \geq 0$ pour tout $n \geq 1$, donc

$$\int_0^1 |f_n(t)| dt = \int_0^1 f_n(t) dt = - \left[\ln t \frac{t^n}{n^2} \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{t^{n-1}}{n^2} dt = 0 + \left[\frac{t^n}{n^3} \right]_0^1 = \frac{1}{n^3}.$$

L'intégration par parties est justifiée (vérifier en intégrant par parties sur $[\varepsilon, 1]$, puis faire tendre ε vers zéro). Comme la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^3}$ converge, le théorème d'intégration terme à terme sur un intervalle quelconque montre que f est intégrable sur $]0, 1[$ (ce que l'on savait déjà) et que

$$I = \int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t) \right) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 f_n(t) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}.$$

97. RMS 2025 993 Mines-Ponts MP-MPI

Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2^n x)}{2^n}$.

Montrer que la fonction f est définie et continue sur \mathbb{R} et qu'elle n'est pas dérivable en 0.

SOLUTION. — Pour tout $(n, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \frac{\sin(2^n x)}{2^n}$. La série de fonctions converge normalement (donc uniformément) sur \mathbb{R} car $|f_n(x)| \leq \frac{1}{2^n}$ et la série numérique $\sum \frac{1}{2^n}$ converge. De plus, chaque fonction f_n est continue, donc la somme f l'est aussi. Enfin, la fonction f n'est pas dérivable en 0 car le taux d'accroissement $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{f(x)}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2^n x)}{2^n x}$ n'a pas de limite finie en 0. En effet, si $u_k = \frac{\pi}{2^k}$, alors u_k tend vers 0 et $\frac{f(u_k)}{u_k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2^{n-k} \pi)}{2^{n-k} \pi}$. Or les termes de cette somme sont nuls à partir du rang k , d'où $\frac{f(u_k)}{u_k} = \sum_{p=1}^k \frac{\sin(\pi/2^p)}{\pi/2^p}$. On reconnaît les sommes partielles de la série numérique $\sum \frac{\sin(\pi/2^p)}{\pi/2^p}$, qui diverge grossièrement car la suite $\frac{\sin(\pi/2^p)}{\pi/2^p}$ ne tend pas vers 0 (elle tend vers 1).

98. B4 Centrale

(a) Montrer qu'il existe une unique fonction $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ et $\forall x > 0, f(x) + f(x+1) = \frac{1}{x^2}$.

(b) Montrer que cette fonction f est continue sur $]0, +\infty[$ et intégrable sur $[1, +\infty[$. Calculer $\int_1^{+\infty} f(x) dx$.

SOLUTION. —

(a) Analyse — Si la fonction f est une solution, alors $\forall x > 0, f(x) + (-1)^n f(x+n+1) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(x+k)^2}$ (télescope alterné).

De plus $f(x+n+1) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, donc $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2}$. D'où l'unicité.

Synthèse — Soit $f_k(x) = \frac{(-1)^k}{(x+k)^2}$ pour tout $(k, x) \in \mathbb{N} \times]0, +\infty[$. D'après le TSA, la fonction f est bien définie sur $]0, +\infty[$ car la suite $\frac{1}{(x+k)^2}$ tend vers 0 en décroissant. De plus, $f(x) + f(x+1) = \frac{1}{x^2}$ (télescope). Enfin, soit $a > 0$: pour tout $(k, x) \in \mathbb{N} \times [a, +\infty[$, $|f_k(x)| \leq \frac{1}{(a+k)^2}$ et la série numérique $\sum \frac{1}{(a+k)^2}$ converge, d'où la série de fonctions $\sum f_k$ converge normalement, donc uniformément sur $[a, +\infty[$. De plus chaque fonction f_k tend vers 0 en $+\infty$, donc la fonction f tend vers 0 en $+\infty$ d'après le théorème de la double limite.

- (b) Chaque fonction f_k est continue sur $[a, +\infty[$, donc la fonction f aussi par convergence uniforme. Ceci est vrai pour tout $a > 0$, donc f est continue sur $]0, +\infty[$.

Par le TSA, $|f(x)| \leq \frac{1}{x^2}$. Or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ converge, donc $\int_1^{+\infty} |f(x)| dx$ aussi. Toujours par le TSA, $f(x) = \sum_{k=0}^n f_k(x) + R_n(x)$ et $|R_n(x)| \leq \frac{1}{(x+n+1)^2}$. D'où $\left| \int_1^{+\infty} f(x) dx - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1} \right| \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{(x+n+1)^2} dx \leq \frac{1}{n+2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.
Donc $\int_1^{+\infty} f(x) dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}$ qui est égal à $\ln(2)$ par le théorème radial d'Abel.

2.4 Séries entières

99. RMS 2015 ENSAM PSI

Soit $(a_n) \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}^*}$ avec $a_1 \geq 1$. On pose $P_n : x \mapsto \sum_{k=1}^n a_k x^k$.

- (a) Montrer qu'il existe un unique $x_n \in [0, 1]$ tel que $P_n(x_n) = 1$.
 (b) Montrer que $P_{n+1}(x_n) \geq 1$. En déduire que la suite (x_n) est décroissante et qu'elle converge.
 (c) On note $\ell = \lim x_n$ et on suppose que $\ell > 0$. Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ est supérieur à ℓ .

SOLUTION. —

- (a) La fonction P_n est continue et $P_n(0) = 0$ et $P_n(1) = \sum_{k=1}^n a_k \geq 1$, donc il existe $\alpha \in [0, 1]$ tel que $P_n(\alpha) = 1$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires. De plus, $P'_n(x) = \sum_{k=1}^n k a_k x^{k-1} > 0$ pour tout $x \in [0, 1]$, la fonction P_n donc strictement croissante, par suite elle est injective et finalement le réel α est unique. On le note x_n .
 (b) On calcule

$$P_{n+1}(x_n) = \sum_{k=1}^{n+1} a_k x_n^k = \sum_{k=1}^n a_k x_n^k + a_{n+1} x_n^{n+1} = 1 + a_{n+1} x_n^{n+1} \geq 1 = P_{n+1}(x_{n+1}).$$

Or la fonction P_{n+1} est strictement croissante, donc $x_n \geq x_{n+1}$. La suite (x_n) est décroissante, minorée par 0 donc elle converge.

- (c) Soit $0 \leq x < \ell = \inf(x_n)$; alors $\forall n \in \mathbb{N}, x < x_n$ donc, parce que la fonction P_n est croissante, $\forall n \in \mathbb{N}, P_n(x) \leq P_n(x_n) = 1$. D'où les sommes partielles $\sum_{k=1}^n a_k x^k$ de la série numérique à termes positifs sont majorées, donc cette série est convergente. On en déduit que $x \leq R$. Or ceci est vrai pour tout $0 \leq x < \ell$, donc

$$R \geq \ell.$$

100. RMS 2013 1017 CCP PSI

- (a) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$ et calculer $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$ pour tout $x \in]-R, +R[$.
 (b) Montrer que, pour $x \in]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$, $\tan(2x) = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$.
 (c) Montrer que $\pi = 8 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} (\sqrt{2} - 1)^{2n+1}$.
 (d) Majorer l'erreur commise en approchant π par la somme partielle d'ordre N de la série précédente.

SOLUTION. —

- (a) La règle de D'Alembert donne $R = 1$. Pour $x \in]-1, 1[$, on a $\frac{d}{dx} \left[\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} \right] = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2}$ car on peut dériver terme à terme une série entière sans changer son rayon de convergence, donc il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in]-1, 1[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = \arctan x + C$. En $x = 0$, on trouve $C = 0$, donc

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = \arctan x.$$

- (b) On utilise $\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$.
 (c) On a $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} (\sqrt{2} - 1)^{2n+1} = \arctan(\sqrt{2} - 1)$. On pose $a = \arctan(\sqrt{2} - 1) \in]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$. Alors $\tan(2a) = 1$, en utilisant $\tan a = \sqrt{2} - 1$ et la question (b), donc $a = \frac{\pi}{8}$, d'où l'on déduit que

$$\pi = 8 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} (\sqrt{2} - 1)^{2n+1}.$$

(d) La série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} (\sqrt{2}-1)^{2n+1}$ vérifie les hypothèses du théorème des séries alternées car la suite $\frac{(\sqrt{2}-1)^{2n+1}}{2n+1}$ tend vers 0 en décroissant. Alors

$$\left| \frac{\pi}{8} - \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{2n+1} (\sqrt{2}-1)^{2n+1} \right| \leq \frac{(\sqrt{2}-1)^{2N+3}}{2N+3}.$$

101. RMS 2009 989 Centrale PSI

Soit (a_n) une suite de réels. On note R le rayon de convergence de la série de terme général $a_n x^n$ et R' celui de la série de terme général $\sin(a_n) x^n$.

Montrer que $R' \geq R$ et qu'il y a égalité si $R > 1$.

SOLUTION. — On utilise la majoration $|\sin u| \leq |u|$, valable pour tout nombre réel u . On en déduit que $\forall (x, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}$, $|\sin(a_n) x^n| \leq |a_n x^n|$. Si $|x| < R$, alors la série $\sum a_n x^n$ converge absolument, donc il en est de même de la série $\sum \sin(a_n) x^n$ donc $|x| \leq R'$. Ceci montre que

$$R' \geq R.$$

Si l'on suppose de plus que $R > 1$, alors la série $\sum a_n$ converge, d'où la suite (a_n) tend vers zéro, d'où $\sin(a_n) \sim a_n$, donc les deux séries entières ont le même rayon de convergence :

$$R' = R.$$

102. RMS 2015 749 Mines Ponts PC

Soit (a_n) une suite complexe. On suppose que $\sum a_n z^n$ a un rayon de convergence $R > 0$, que $\sum a_{2n} z^n$ a un rayon de convergence $R_1 > 0$ et que $\sum a_{2n+1} z^n$ a un rayon de convergence $R_2 > 0$. Exprimer R en fonction de R_1 et R_2 .

SOLUTION. — Si $|z|^2 < R_1$, alors la série de terme général $a_{2n} (z^2)^n = a_{2n} z^{2n}$ converge. De même, si $|z|^2 < R_2$, alors la série de terme général $z \times a_{2n+1} (z^2)^n = a_{2n+1} z^{2n+1}$ converge. Par conséquent, si $|z|^2 < \min(R_1, R_2)$, c'est-à-dire si $|z| < \min(\sqrt{R_1}, \sqrt{R_2})$, alors la série de terme général $a_n z^n$ converge, et on en déduit que

$$R \geq \min(\sqrt{R_1}, \sqrt{R_2}).$$

Si $|z| > \min(\sqrt{R_1}, \sqrt{R_2})$, alors au moins une des deux suites $(a_{2n} z^{2n})$ ou $(a_{2n+1} z^{2n+1})$ n'est pas bornée, donc la suite $(a_n z^n)$ n'est pas bornée, donc la série $\sum a_n z^n$ diverge, donc $R \leq \min(\sqrt{R_1}, \sqrt{R_2})$. On conclut que

$$R = \min(\sqrt{R_1}, \sqrt{R_2}).$$

103. RMS 132-709 Mines-Ponts PSI 2021

On considère une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence R strictement positif.

- Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{a_n}{n!} z^n$.
- On pose $b_n = \frac{a_n}{1+|a_n|}$. Montrer que la série entière $\sum b_n z^n$ a un rayon de convergence R' supérieur ou égal à 1. Puis prouver que $R' = \max(1, R)$.

SOLUTION. —

- $a_n \left(\frac{R}{2}\right)^n$ tend vers 0, d'où $\left|\frac{a_n}{n!} z^n\right| = \left|a_n \left(\frac{R}{2}\right)^n\right| \cdot \left|\frac{(2z/R)^n}{n!}\right|$ est inférieur ou égal $\left|\frac{(2z/R)^n}{n!}\right|$ à partir d'un certain rang. Or la série $\sum \frac{x^n}{n!}$, avec $x = |2z/R|$, converge pour tout $z \in \mathbb{C}$. Donc le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{a_n}{n!} z^n$ est infini.
- $|b_n| \leq 1$, d'où R' est supérieur ou égal au rayon de convergence de la série $\sum z^n$, qui vaut 1. On distingue trois cas :
 - si $R > 1$, alors $a_n \rightarrow 0$, d'où $|a_n| \sim |b_n|$, donc $R' = R$;
 - si $R < 1$, alors $R' \leq 1$ car (par l'absurde) $R' > 1 \implies b_n \rightarrow 0 \implies |a_n| = \frac{|b_n|}{1-|b_n|} \rightarrow 0 \implies R \geq 1$;
 - si $R = 1$, alors $R' = 1$ car (par l'absurde) $R' > 1 \implies b_n \rightarrow 0 \implies |a_n| \sim |b_n| \implies R = R'$.

Donc $R' = \max(1, R)$.

104. RMS 2013 379 X ESPCI PC

Soient $a_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \prod_{k=1}^n \left(\frac{2k-1}{2k}\right)$.

- Montrer que le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$ vaut 1.
- Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ pour tout $x \in]-1, +1[$. Trouver une équation différentielle vérifiée par f sur $] -1, +1[$.
- Calculer $f(x)$ pour tout $x \in]-1, +1[$.

SOLUTION. —

- (a) Par le critère de D'Alembert.
- (b) D'après le théorème de dérivation terme à terme sur l'intervalle ouvert de convergence, on a $\forall x \in]-1, 1[$, $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$, donc $\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n = x f'(x)$. On remarque que $a_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2} a_n$ ou encore $2(n+1)a_{n+1} = 2n a_n + a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En multipliant par x^n avec $|x| < 1$ et en sommant (les séries entières qui apparaissent ont toute 1 pour rayon de convergence), on obtient

$$2 \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = 2 f'(x) = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 2x f'(x) + f(x).$$

La fonction f est donc solution de l'équation différentielle linéaire homogène du premier ordre

$$2(1-x)y' - y = 0.$$

- (c) Les solutions sur $] - 1, 1[$ de cette équation différentielle sont les fonctions telles qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ vérifiant $\forall x \in] - 1, 1[$, $y(x) = \frac{\alpha}{\sqrt{1-x}}$. Comme $y(0) = \alpha$ et comme $f(0) = a_0 = 1$, et comme $a_n = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on conclut que

$$\forall x \in] - 1, 1[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} x^n = \frac{1}{\sqrt{1-x}}.$$

Remarque : On vérifie en effet que $(1-x)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (-x)^n$, avec

$$c_n = \frac{(-1)^n}{n!} \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{3}{2}\right) \cdots \left(-\frac{1}{2} - n + 1\right) = \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{2^n n!} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} = a_n.$$

105. RMS 2011 1145 CCP PC, RMS 2012 1333 CCP PC, RMS 2013 1062 CCP PC & RMS 2016 782 Centrale PSI

Mots-clés : nombre de dérangements

Soit $(d_n)_{n \geq 0}$ définie par $d_0 = 1$, $d_1 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $d_{n+2} = (n+1)(d_{n+1} + d_n)$.

- (a) Calculer d_2 et d_3 . Montrer que $\forall n \geq 2$, $\frac{n!}{3} \leq d_n \leq n!$ et en déduire le rayon de convergence R de la série entière de terme général $\frac{d_n}{n!} x^n$.
- (b) Pour tout $x \in] - R, R[$, on pose $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{n!} x^n$. Montrer que $\forall x \in] - R, R[$, $(1-x)S'(x) = xS(x)$.
- (c) En déduire une expression de $S(x)$ en fonction de x et exprimer d_n comme une somme en fonction de n .

SOLUTION. —

- (a) On obtient $d_2 = 1$ et $d_3 = 2$. On démontre par récurrence forte que $(\mathcal{P}_n) : \frac{n!}{3} \leq d_n \leq n!$ est vraie.

La propriété (\mathcal{P}_2) est vraie car $\frac{2!}{3} = \frac{2}{3} \leq d_2 = 1 \leq 2!$, et (\mathcal{P}_3) est vraie car $\frac{3!}{3} = 2 \leq d_3 = 2 \leq 3!$. Supposons que (\mathcal{P}_k) soit vraie pour tout entier k tel que $2 \leq k \leq n+1$. Alors

$$\frac{(n+2)!}{3} = \frac{n+1}{3} [(n+1)! + n!] \leq d_{n+2} = (n+1)(d_{n+1} + d_n) \leq (n+1)[(n+1)! + n!] = (n+2)!,$$

donc (\mathcal{P}_{n+2}) est vraie.

Ceci montre que $\frac{|x|^n}{3} \leq \frac{d_n}{n!} |x|^n \leq |x|^n$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Les séries de terme généraux $|x|^n/3$ et $|x|^n$ étant convergentes si et seulement si $|x| < 1$, on en déduit que

$$R = 1.$$

- (b) On multiplie la relation $d_{n+2} = (n+1)(d_{n+1} + d_n)$ par $\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$, et on somme pour n variant de zéro à l'infini. Comme les sommes de séries entières sont dérivables terme à terme sur leur intervalle ouvert de convergence, on obtient, pour tout $x \in] - 1, 1[$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_{n+2}}{(n+1)!} x^{n+1} &= \frac{d}{dx} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_{n+2}}{(n+2)!} x^{n+2} \right) = \frac{d}{dx} \left(S(x) - \frac{d_0}{0!} - \frac{d_1}{1!} x \right) = S'(x) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_{n+1}}{n!} x^{n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{n!} x^{n+1} = x \frac{d}{dx} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_{n+1}}{(n+1)!} x^{n+1} \right) + x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{n!} x^n \\ &= x S'(x) + x S(x). \end{aligned}$$

Cette relation se réécrit sous la forme $\forall x \in] - R, R[$, $(1-x)S'(x) = xS(x)$.

- (c) La résolution, sur l'intervalle $] -1, 1[$, de l'équation différentielle homogène $y'(x) + \frac{x}{x-1}y(x) = y'(x) + (1 + \frac{1}{x-1})y(x) = 0$ donne les solutions suivantes : $x \mapsto \lambda e^{-x}/(1-x)$, où λ est une constante réelle. La valeur $S(0) = d_0 = 1$ montre que $\lambda = 1$, donc que

$$\forall x \in] -1, 1[, \quad S(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}.$$

L'égalité ci-dessus montre que $S(x)$ est le produit de Cauchy des deux séries $\sum (-x)^n/n!$ (série exponentielle, de rayon de convergence $+\infty$) et $\sum x^n$ (série géométrique, de rayon de convergence 1). Le théorème relatif au produit de Cauchy de deux séries entières affirme que $\sum (d_n/n!)x^n$ a un rayon de convergence ≥ 1 , ce que l'on savait déjà, et que $d_n/n! = \sum_{k=0}^n e_k f_{n-k}$, avec $e_k = (-1)^k/k!$ et $f_k = 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. On obtient finalement

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad d_n = n! \left(\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \right).$$

106. RMS 2016 939 ENSEA PSI, RMS 2016 941 CCP PSI

Soit (a_n) dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $a_1 \geq a_0 > 0$ et $\forall n \geq 2, a_n = a_{n-1} + \frac{2}{n}a_{n-2}$.

- (a) Montrer que la suite (a_n) est croissante et que la suite $(\frac{a_n}{n^2})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante. En déduire le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$
 (b) Former une équation différentielle vérifiée par la somme et calculer cette somme dans le cas où $a_0 = a_1 = 1$.

SOLUTION. —

- (a) Par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, a_n > 0$ donc $\forall n \geq 2, a_n - a_{n-1} = \frac{2}{n}a_{n-2} \geq 0$ et (a_n) est croissante.

Montrons que $(\frac{a_n}{n^2})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante :

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{n^2} - \frac{a_{n-1}}{(n-1)^2} &= \frac{a_{n-1}}{n^2} + \frac{2a_{n-2}}{n^3} - \frac{a_{n-1}}{(n-1)^2} = \frac{2}{n^3}a_{n-2} - \frac{2n-1}{n^2(n-1)^2}a_{n-1} \stackrel{(a_{n-2} \leq a_{n-1})}{\leq} \left[\frac{2}{n^3} - \frac{2n-1}{n^2(n-1)^2} \right] a_{n-1} \\ &= \frac{-3n+2}{n^3(n-1)^2} a_{n-1} \leq 0. \end{aligned}$$

La suite $(\frac{a_n}{n^2})_{n \in \mathbb{N}^*}$ étant décroissante et minorée par 0, elle est bornée. On déduit de ce qui précède que $a_n = O(n^2)$ donc $R \geq 1$ et comme $a_n \geq a_0 > 0, R \leq 1$ c'est-à-dire

$$R = 1.$$

- (b)

$$\forall x \in] -1, 1[, \quad (x-1)f'(x) + (2x+1)f(x) = 0.$$

Donc, grâce à la C.I. $f(0) = a_0 = 1$,

$$\forall x \in] -1, 1[, \quad f(x) = -\frac{e^{-2x}}{(x-1)^3}.$$

107. RMS 2016 593 Mines Ponts PC, RMS 2013 607 Mines Ponts PSI, RMS 2014 770 Mines Ponts PC

Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*, H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. Soient $f: x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} H_n x^n$ et $g: x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} (\ln n)x^n$.

- (a) Montrer que la suite $(H_n - \ln n)$ est convergente.
 (b) Montrer que les fonctions f et g sont définies sur $] -1, +1[$.
 (c) Montrer que, pour tout $x \in] -1, +1[, f(x) = -\frac{\ln(1-x)}{1-x}$.
 (d) Montrer que $f(x) \sim g(x)$ ($x \rightarrow 1^-$).

108. RMS 2013 670 Mines Ponts PC, RMS 2006 1132 CCP PC, RMS 2011 1144 CCP PC, RMS 2013 1019 CCP PSI

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \int_0^1 (\frac{1+t^2}{2})^n dt$.

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}, a_n \geq \frac{1}{n+1}$ et étudier la limite de la suite (a_n) .

Quel est l'ensemble de définition de la fonction $f: x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$?

SOLUTION. — On pose $u_n: t \in [0, 1] \mapsto (\frac{1+t^2}{2})^n$.

On constate que $\forall t \in [0, 1], t \leq \frac{1+t^2}{2}$, donc $t^n \leq u_n(t)$. En intégrant, on trouve $\frac{1}{n+1} \leq a_n$, donc $\sum a_n$ diverge par comparaison de termes positifs.

Pour tout $t \in [0, 1]$, la suite numérique $(u_n(t))_{n \geq 0}$ converge vers zéro, puisqu'il s'agit d'une suite géométrique de raison $\frac{1+t^2}{2} \in [\frac{1}{2}, 1[$. De plus, la suite de terme général $u_n(1)$ est constante et vaut 1. La suite de fonctions $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge donc simplement sur $[0, 1]$ vers la fonction qui vaut 1 en 1 et 0 ailleurs, qui est continue par morceaux. Par ailleurs, l'hypothèse de domination suivante est vérifiée : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0, 1], |u_n(t)| \leq \varphi(t) := 1$, la fonction φ étant intégrable sur $[0, 1]$. Le théorème de convergence dominée s'applique, et

$$\lim_{+\infty} a_n = \int_0^1 0 dt = 0.$$

Comme la raison $r = \frac{1+t^2}{2}$ appartient à $[0, 1]$, la suite de terme général $u_n(t) = r^n$ est décroissante. Par conséquent, la suite des intégrales a_n est décroissante. Alors la série $\sum (-1)^n a_n$ vérifie les hypothèses du théorème spécial des séries alternées, donc converge.

La série $\sum a_n x^n$ converge en -1 , diverge en $+1$ et c'est une série entière, donc son rayon de convergence vaut 1. L'ensemble de définition de la fonction f est donc $]-1, +1[$.

109. UPS 20260409 Centrale PC 2025

Soit $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n} e^{inx}$. Montrer que :

- la fonction S est définie et de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} ;
- $U_k = \sum_{n=0}^{\infty} n^k e^{-n}$ est un $O(k!)$ quand k tend vers ∞ ;
- la fonction S est développable en série entière sur un intervalle à préciser.

SOLUTION. —

- Soit $x \in \mathbb{R}$. La série numérique $\sum e^{-n} e^{inx}$ converge car elle converge absolument. En effet $|e^{-n} e^{inx}| = e^{-n}$ et la série $\sum e^{-n}$ converge car c'est une série géométrique de raison $e^{-1} \in]-1, +1[$. Soit $f_n(x) = e^{-n} e^{inx}$. Chaque fonction f_n est \mathcal{C}^∞ et, pour chaque $k \in \mathbb{N}$, la série de fonctions $\sum f_n^{(k)}$ converge normalement car $f_n^{(k)}(x) = (in)^k e^{-n} e^{inx}$, d'où $|f_n^{(k)}(x)| = n^k e^{-n}$, or la série $\sum n^k e^{-n}$ converge car $n^k e^{-n} = o(e^{-n/2})$ et $e^{-n/2}$ ne change pas de signe et la série géométrique $\sum (e^{-1/2})^n$ converge. Donc la fonction S est \mathcal{C}^∞ et on peut dériver terme à terme : $\forall k \in \mathbb{N}, S^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (in)^k e^{-n} e^{inx}$.

AUTRE MÉTHODE — En reconnaissant une série géométrique dont la raison e^{-1+ix} a un module e^{-1} strictement inférieur à 1 : $S(x) = \frac{1}{1-e^{-1+ix}}$, donc S est \mathcal{C}^∞ .

- On sait ou on retrouve que $\int_0^{+\infty} x^k e^{-x} dx = k!$. Puis on compare série et intégrale : la fonction $f : x \mapsto x^k e^{-x}$ est dérivable et $f'(x) = (-x+k)x^{k-1} e^{-x}$. Sur $[0, k]$, la fonction f est croissante, d'où $\sum_{n=0}^{k-1} f(n) \leq \int_0^k f(x) dx$. Sur $[k, +\infty[$, f est décroissante, d'où $\sum_{n=k+1}^{\infty} f(n) \leq \int_k^{+\infty} f(x) dx$. Donc $0 \leq U_k = \sum_{n=0}^{k-1} f(n) + f(k) + \sum_{n=k+1}^{\infty} f(n) \leq \int_0^{+\infty} f(x) dx + f(k) = k! + k^k e^{-k}$. Or $k^k e^{-k} \sim \frac{k!}{\sqrt{2\pi k}}$ d'après la formule de Stirling. D'où $0 \leq U_k \leq k! + o(k!)$. Donc $U_k = O(k!)$.

- La fonction S est \mathcal{C}^∞ , d'où $\forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{N}, S(x) = \sum_{n=0}^k \frac{S^{(k)}(0)}{k!} + R_k(x)$, où $R_k(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^k}{k!} S^{(k+1)}(t) dt$ d'après la FTY avec reste intégral. La fonction S est DSE sur $]-1, +1[$ car $|x| < 1 \implies |R_k(x)| \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$. En effet, si $x \geq 0$, alors $|R_k(x)| \leq \int_0^x \frac{(x-t)^k}{k!} |S^{(k+1)}(t)| dt$. D'après a), $S^{(k+1)}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (in)^{k+1} e^{-n} e^{int}$. D'après l'inégalité triangulaire, $|S^{(k+1)}(t)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} n^{k+1} e^{-n} = U_{k+1} = O((k+1)!)$ d'après b). Il existe donc une constante C telle que $|S^{(k+1)}(t)| \leq (k+1)!C$. D'où $|R_k(x)| \leq \int_0^x \frac{(x-t)^k}{k!} (k+1)!C dt = C|x|^{k+1}$. De même si $x \leq 0$.

AUTRE MÉTHODE — Avec le théorème de Fubini : soit $u_{n,k} \in \mathbb{C}$. Si la série $\sum_{k \in \mathbb{N}} |u_{n,k}|$ cv et la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k=0}^{\infty} |u_{n,k}|$ cv d'une part, et si la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} |u_{n,k}|$ cv et la série $\sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{n=0}^{\infty} |u_{n,k}|$ cv d'autre part, alors $\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} |u_{n,k}| = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} |u_{n,k}|$. Ici, $u_{n,k} = e^{-n} \frac{(inx)^k}{k!}$ et $|u_{n,k}| = e^{-n} \frac{(n|x|)^k}{k!}$.

D'une part, la série $\sum_{k \in \mathbb{N}} |u_{n,k}| = e^{-n} \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{(n|x|)^k}{k!}$ cv et $e^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n|x|)^k}{k!} = e^{-n} e^{n|x|}$, or la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} e^{-n} e^{n|x|}$ cv si $|x| < 1$.

D'autre part, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} |u_{n,k}| = \frac{|x|^k}{k!} \sum_{n \in \mathbb{N}} n^k e^{-n}$ cv et $\frac{|x|^k}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} n^k e^{-n} = \frac{|x|^k}{k!} U_k$, or la série $\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{|x|^k}{k!} U_k$ cv si $|x| < 1$ d'après b).

D'où, d'après le théorème de Fubini, $S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ si $x \in]-1, +1[$, en posant $a_k = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n} \frac{(in)^k}{k!}$.

2.5 Équations différentielles & calcul différentiel

110. RMS 2014 1308 CCP PSI

$$\text{Soit } (S) \begin{cases} x'(t) = y(t) - z(t) \\ y'(t) = z(t) - x(t) \\ z'(t) = x(t) - y(t), \end{cases} \text{ avec } x(0) = 1, y(0) = z(0) = 0.$$

- (a) Montrer que la trajectoire de toute solution est incluse dans une sphère et dans un plan.
 (b) Résoudre directement (S).

SOLUTION. — (Voir aussi [▷ le Kdo du 13/03/2026.](#))

- (a) $x' + y' + z' = 0$, donc, $\forall t \in \mathbb{R}$, $x(t) + y(t) + z(t) = cte = x(0) + y(0) + z(0) = 1$. Donc la trajectoire est incluse dans le plan d'équation $x + y + z = 1$.

De la même manière, $xx' + yy' + zz' = 0$. D'où $x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2 = cte = x(0)^2 + y(0)^2 + z(0)^2 = 1$. Donc la trajectoire est incluse dans la sphère de rayon 1.

- (b) Le spectre de la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ est : $\text{Sp}(A) = \{0, i\sqrt{3}, -i\sqrt{3}\}$; un vecteur propre associé à 0 est

$(1, 1, 1)$ et un vecteur propre associé à $\pm i\sqrt{3}$ est $(\pm i\sqrt{3} - 1, -1 - (\pm i\sqrt{3}), 2)$.

(x, y, z) est donc une solution si, et seulement si, il existe des constantes (a, b, c) telles que, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \exp(i\sqrt{3}t) \begin{pmatrix} i\sqrt{3} - 1 \\ -i\sqrt{3} - 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c \exp(-i\sqrt{3}t) \begin{pmatrix} -i\sqrt{3} - 1 \\ i\sqrt{3} - 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

La C.I. est vérifiée si, et seulement si : $a = \frac{2}{3}$, $b = \frac{1}{3}$ et $c = -\frac{1}{3}$.

111. RMS 2010 1026 CCP PSI

Mots-clés : *raccordement de solutions, théorème de la limite de la dérivée*

Soit (E) : $(1+x)y' - 2y = 0$.

- (a) Déterminer les solutions sur \mathbb{R} de (E). Donner une base de l'ensemble des solutions.
 (b) Donner une base de l'ensemble des solutions de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}

SOLUTION. — Le coefficient $1+x$ s'annule en -1 . On commence donc par résoudre (E) sur les intervalles $I_1 =]-\infty, -1[$ et $I_2 =]-1, +\infty[$. On trouve que les solutions sont les fonctions d'expression

$$y(x) = \begin{cases} k_1(x+1)^2 & \text{si } x \in I_1 \\ k_2(x+1)^2 & \text{si } x \in I_2, \end{cases}$$

où k_1 et k_2 sont deux constantes réelles.

- (a) ANALYSE — Si la fonction y est une solution sur \mathbb{R} , alors elle est continue en -1 . Or la limite en -1^- vaut 0, donc $y(-1) = 0$.

SYNTHÈSE — Les fonctions définies par

$$y(x) = \begin{cases} k_1(x+1)^2 & \text{si } x \in I_1 \\ 0 & \text{si } x = -1 \\ k_2(x+1)^2 & \text{si } x \in I_2, \end{cases}$$

où k_1 et k_2 sont deux constantes réelles sont continues.

De plus,

$$y'(x) = \begin{cases} 2k_1(x+1) & \text{si } x \in I_1 \\ 2k_2(x+1) & \text{si } x \in I_2, \end{cases}$$

D'après le théorème de la limite de la dérivée, elles sont dérivables en -1 et $y'(-1) = 0$ car $\lim_{-1} y' = 0$. (En effet, $\lim_{-1^+} y' = 0$ et $\lim_{-1^-} y' = 0$.) Enfin $(1+x)y'(x) - 2y(x)$ est bien égal à 0 si $x = -1$.

Donc y est une solution sur \mathbb{R} si, et seulement si, il existe des constantes k_1 et k_2 telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$y(x) = \begin{cases} k_1(x+1)^2 & \text{si } x \in I_1 \\ 0 & \text{si } x = -1 \\ k_2(x+1)^2 & \text{si } x \in I_2, \end{cases}$$

Une base de l'ensemble des solutions est formée par les deux solutions y_1 et y_2 définies par :

$$y_1(x) = (x + 1)^2 \text{ si } x \in I_1 \text{ et } 0 \text{ sinon}$$

et

$$y_2(x) = (x + 1)^2 \text{ si } x \in I_2 \text{ et } 0 \text{ sinon.}$$

(b) Comme

$$y''(x) = \begin{cases} 2k_1 & \text{si } x \in I_1 \\ 2k_2 & \text{si } x \in I_2, \end{cases}$$

y est \mathcal{C}^2 si et seulement si $k_1 = k_2$. La fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto (x + 1)^2$ forme alors une base de l'ensemble des solutions.

112. RMS 2013 921 Centrale PC

Déterminer les fonctions $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) + f(-x) = e^x$.

SOLUTION. — Analyse — Si f est une solution, alors f est deux fois dérivable puisque f' est la somme de deux fonctions dérivables : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^x - f(-x)$. De plus, $f''(x) = e^x + f'(-x) = e^x + e^{-x} - f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc f est solution de l'équation différentielle $y'' + y = e^x + e^{-x}$. Il existe donc $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = A \cos x + B \sin x + \operatorname{ch} x$.

Synthèse — Si f possède la forme ci-dessus, alors $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) + f(-x) = -A \sin x + B \cos x + \operatorname{ch} x + A \cos x - B \sin x + \operatorname{ch} x = (A+B)(\cos x - \sin x) + e^x$. La fonction f vérifie l'identité souhaitée si et seulement si $\forall x \in \mathbb{R}, (A+B)(\cos x + \sin x) = 0$, donc si, et seulement si, $A+B = 0$ puisque la fonction $\cos - \sin$ n'est pas identiquement nulle. Finalement, les solutions sont les fonctions f telles que

$$\exists A \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = A(\cos x - \sin x) + \operatorname{ch} x.$$

113. RMS 2016 525 Mines Ponts PSI

L'application $H: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $H(x, y) = \frac{x^4 y}{x^4 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$, et $H(0, 0) = 0$, est-elle continue ? de classe \mathcal{C}^1 ?

SOLUTION. — La fonction H est continue en dehors de $(0, 0)$.

Et aussi en $(0, 0)$ car $0 \leq |H(x, y) - H(0, 0)| \leq |y| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$.

La fonction H possède des dérivées partielles en dehors de $(0, 0)$. Et en $(0, 0)$ aussi car : $\frac{H(0+h, 0) - H(0, 0)}{h} = 0 \rightarrow 0$ ($h \rightarrow 0$), d'où $\partial_1 H(0, 0)$ existe et vaut 0. De même, $\partial_2 H(0, 0)$ existe et vaut 0.

Si $(x, y) \neq (0, 0)$, alors $\partial_2 H(x, y) = x^4 \frac{x^4 - y^2}{(x^4 + y^2)^2}$. On obtient $\partial_2 H(x, 2x^2) = -\frac{3}{25}$, qui ne tend pas vers 0 quand x tend vers 0, donc $\partial_2 H$ n'est pas continue en $(0, 0)$ et H n'est pas de classe \mathcal{C}^1 .

114. RMS 2009 998 Centrale PSI

Trouver les extrema de $(x, y) \mapsto \sin(x) \sin(y) \sin(x + y)$ sur $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi, 0 \leq x + y \leq \pi\}$.

SOLUTION. — On note f la fonction étudiée, et T l'ensemble sur lequel on cherche les extrema : c'est le triangle fermé OAB avec $A = (\pi, 0)$ et $B = (0, \pi)$.

Comme f est continue et T est fermé borné, f est bornée et atteint ses bornes sur T . Comme le sinus est une fonction positive sur $[0, \pi]$, on a $f \geq 0$ sur T . De plus $f(x, y) = 0$ sur T si, et seulement si, $x = 0$ ou $y = 0$ ou $x + y = \pi$, autrement dit sur les trois côtés de T . On vient donc de déterminer le minimum global de f sur T et les points en lesquels il est atteint.

Le maximum global de f , qui n'est pas constante sur T , sera nécessairement à l'intérieur de T , donc sur un ouvert. Comme f est de classe \mathcal{C}^1 , ce maximum global sera atteint en un point critique : $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \sin(y)[\cos(x) \sin(x + y) + \sin(x) \cos(x + y)] = \sin(y) \sin(2x + y)$ et, parce que f est symétrique, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \sin(x) \sin(2y + x)$. D'où un point (x, y) intérieur à T est critique si, et seulement si, $2x + y = \pi$ et $x + 2y = \pi$. On obtient un unique point critique $M_0 = (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$ qui est bien à l'intérieur de T . En ce point critique, f atteint nécessairement son maximum global, qui vaut $\frac{3\sqrt{3}}{8}$, et il n'y a pas d'autre extremum local.

REMARQUE. — Indépendamment du raisonnement ci-dessus, on peut déterminer la nature du point critique M_0 en étudiant la hessienne : $H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 \sin(y) \cos(2x + y) & \cos(2x + 2y) \\ \cos(2x + 2y) & 2 \sin(x) \cos(2y + x) \end{pmatrix}$ est égale en M_0 à $H_f(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}) = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$. Son déterminant $\det H_f(M_0) = 3 - \frac{1}{4}$ est strictement positif, donc f possède un extremum local en M_0 et sa trace $\operatorname{tr} H_f(M_0) = -2\sqrt{3}$ est négative, donc cet extremum local est un maximum local.

115. RMS 2016 612 Mines Ponts PC

Déterminer les solutions f de classe C^1 sur $U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ de l'équation $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{x}$.

SOLUTION. — Passons en coordonnées polaires en posant $V =]0, +\infty[\times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et $M : V \rightarrow U, (r, \theta) \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta)$. Cette application est une bijection de classe C^1 . Si f est C^1 sur U , alors $F = f \circ M : V \rightarrow \mathbb{R}, (r, \theta) \mapsto F(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$ est C^1 sur V et, d'après la règle de la chaîne :

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial r}(r, \theta) = \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) + \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta) \\ \frac{\partial F}{\partial \theta}(r, \theta) = -r \sin \theta \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) + r \cos \theta \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta) \end{cases}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{y}{x}, \\ \iff r \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) + r \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta) &= \tan \theta \\ \iff \frac{\partial F}{\partial r}(r, \theta) &= \frac{\tan \theta}{r} \\ \iff \exists G \in C^1(] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[), \quad F(r, \theta) &= \tan \theta \ln r + G(\theta) \\ \iff \exists G \in C^1(] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[), \quad f(x, y) &= \frac{y}{x} \ln \sqrt{x^2 + y^2} + G\left(\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right). \end{aligned}$$

Donc f est une solution de classe C^1 sur U ssi $\exists g \in C^1(\mathbb{R}), \quad \forall (x, y) \in U, \quad f(x, y) = \frac{y}{2x} \ln(x^2 + y^2) + g\left(\frac{y}{x}\right)$.

116. RMS 2013 396 X ESPCI PC

On munit \mathbb{R}^n de sa structure euclidienne canonique. Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable dont toutes les dérivées partielles sont bornées entre -1 et 1. Montrer que $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2, |f(x) - f(y)| \leq \sqrt{n} \|x - y\|$. (On pourra utiliser la fonction $\varphi : t \mapsto f(tx + (1-t)y)$.)

SOLUTION. — (Voir aussi l'exercice 122.)

On se ramène à une variable grâce à la fonction $M : t \in [0, 1] \mapsto tx + (1-t)y$ qui vérifie $M(0) = y$ et $M(1) = x$ et est dérivable : $\forall t \in [0, 1], M'(t) = x - y$. La fonction d'une variable $\varphi = f \circ M$ vérifie $\varphi(0) = f(y)$ et $\varphi(1) = f(x)$ et est dérivable d'après la règle de la chaîne :

$$\forall t \in [0, 1], \quad \varphi'(t) = \langle \nabla f(M(t)), M'(t) \rangle = \langle \nabla f(M(t)), x - y \rangle.$$

Pour tout $z \in \mathbb{R}^n, \|\nabla f(z)\|^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(z)\right)^2 \leq \sum_{i=1}^n 1 = n$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz montre alors que

$$\forall t \in [0, 1], \quad |\varphi'(t)| \leq \sqrt{n} \|x - y\|.$$

Par l'inégalité des accroissements finis (valable car φ est continue sur $[0, 1]$ et dérivable sur $]0, 1[$), on en déduit que

$$|f(x) - f(y)| = |\varphi(1) - \varphi(0)| \leq \sqrt{n} \|x - y\| (1 - 0).$$

117. RMS 2012 357 X ESPCI PC

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ différentiable telle que $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2, \|f(x) - f(y)\| \geq \|x - y\|$. Montrer que f est injective. Et que, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n, df(x_0)$ est bijective.

SOLUTION. — Si $x \neq y$, alors $\|f(x) - f(y)\| \geq \|x - y\| \neq 0$, donc $f(x) \neq f(y)$: la fonction f est injective. On fixe x_0 et h dans \mathbb{R}^n , et on désigne par t une variable réelle. Alors, parce que f est différentiable en $x_0, f(x_0 + th) = f(x_0) + df(x_0) \cdot (th) + o(th) = f(x_0) + t df(x_0) \cdot h + o(t)$. D'où $\|f(x_0 + th) - f(x_0)\| = \|t df(x_0) \cdot h + o(t)\| \geq \|th\|$, d'où $\|df(x_0) \cdot h + o(1)\| \geq \|h\|$, le $o(1)$ étant relatif à la variable réelle t en zéro. En faisant tendre t vers zéro, on obtient

$$\forall (x_0, h) \in (\mathbb{R}^n)^2, \quad \|df(x_0) \cdot h\| \geq \|h\|.$$

Ceci prouve que la différentielle $df(x_0)$ de f en x_0 est injective, donc bijective, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

118. RMS 2009 1062 Centrale PC

Soit f une fonction de \mathbb{R}^2 vers \mathbb{R} différentiable. On suppose que $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^2)^2, |f(x) - f(y)| \leq \|x - y\|^2$. Montrer que f est constante.

SOLUTION. — On fixe $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$. Comme f est différentiable en a , $f(a+h) = f(a) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)h_2 + o(h)$, et si on applique l'inégalité $|f(x) - f(y)| \leq \|x - y\|^2$ avec $x = a + (0, h_1)$ et $y = a$, on obtient

$$\forall h_1 \in \mathbb{R}, \quad \left| \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)h_1 + o(h_1) \right| \leq h_1^2.$$

En divisant par $h_1 \neq 0$, puis en faisant tendre h_1 vers 0, l'inégalité large passe à la limite et on obtient $|\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)| \leq 0$, c'est-à-dire $\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = 0$.

Il s'ensuit que f est constante sur toute droite du plan parallèle à Ox . On montre de même qu'elle est constante sur toute droite parallèle à Oy et, finalement, qu'elle est constante sur \mathbb{R}^2 .

119. RMS 2024 876 Mines Ponts MP MPI

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ différentiable telle que $\|f(x)\| \xrightarrow{\|x\| \rightarrow +\infty} +\infty$ et que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $df(x)$ est surjective. Soient $a \in \mathbb{R}^n$ et $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \|f(x) - a\|^2$.

- Montrer que la fonction g est différentiable et exprimer $dg(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.
- Montrer que la fonction g admet un minimum global.
- En déduire que la fonction f est surjective.

SOLUTION. —

- Soit $x \in \mathbb{R}^n$: pour tout $h \in \mathbb{R}^n$, $g(x+h) = \|f(x+h) - a\|^2 = \|f(x) + df(x) \cdot h + o(h) - a\|^2 = \|f(x) - a\|^2 + 2\langle f(x) - a, df(x) \cdot h \rangle + o(h)$, d'où g est différentiable en x et $dg(x)$ est l'application linéaire $h \mapsto 2\langle f(x) - a, df(x) \cdot h \rangle$.
- D'une part, $g(x) = \|f(x) - a\|^2 \geq (\|f(x)\| - \|a\|)^2$ d'après l'inégalité triangulaire inversée. Or $\|f(x)\|$ tend vers $+\infty$ quand $\|x\|$ tend vers $+\infty$ par hypothèse. D'où $g(x)$ tend vers $+\infty$ quand $\|x\|$ tend vers $+\infty$. Il existe donc $R > 0$, tel que $\|x\| > R \implies g(x) \geq g(0)$.

D'autre part, la fonction g est continue car différentiable. Et la boule fermée B de centre 0 et de rayon R est compacte. La fonction $g|_B$ est continue sur le compact B , elle possède donc un minimum global m . Et $m \leq g(0)$ car $0 \in B$. Donc m est le minimum global de g sur \mathbb{R}^n .

- Soit $a \in \mathbb{R}^n$: la fonction g est différentiable et elle possède un minimum global en un point x de l'ouvert \mathbb{R}^n , d'où $dg(x) = 0$. D'où $\langle f(x) - a, df(x) \cdot h \rangle = 0$ pour tout $h \in \mathbb{R}^n$. Or l'application $h \mapsto df(x) \cdot h$ est surjective par hypothèse, d'où $\langle f(x) - a, k \rangle = 0$ pour tout $k \in \mathbb{R}^n$. D'où $f(x) - a = 0$. Donc f est surjective.

120. B1 Centrale

Mots-clés : extrema liés

Soient $n \geq 2$, la fonction $g :]0, +\infty[^n \rightarrow \mathbb{R}$, $(x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^n \ln(x_i)$ et l'ensemble $C = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in]0, +\infty[^n \mid \sum_{i=1}^n x_i = 1 \right\}$.

- Montrer que : $\forall x \in C$, $g(x) \leq \frac{1}{n} \ln(n)$.
- Étudier les extrema locaux de la fonction $g|_C$, restriction de g à C .

SOLUTION. —

- Soit $x \in C$: $g(x) = \sum_{i=1}^n \ln x_i = n \times \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \ln x_i \leq n \times \ln \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} x_i$ car la fonction \ln est concave. D'où $g(x) \leq n \ln \frac{1}{n}$ si $x \in C$.
- La fonction $f : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^n x_i$ est C^1 sur l'ouvert $]0, +\infty[^n$ et constante sur C . De plus aucun point $x \in C$ n'est un point critique de f car $\nabla f(x) = (1, \dots, 1) \neq 0$. La fonction g est sur l'ouvert $]0, +\infty[^n$.

Analyse — D'après le théorème des extrema liés, si la restriction $g|_C$ de la fonction g à l'ensemble C possède un extremum local en $x \in C$, alors $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $\nabla g(x) = \lambda \nabla f(x)$. Or $\nabla g(x) = \left(\frac{1}{x_1}, \dots, \frac{1}{x_n} \right)$. D'où $x_1 = \dots = x_n = \frac{1}{n}$ car $x \in C$. Donc $g(x) = n \ln \frac{1}{n}$.

Synthèse — D'après la première question, $\frac{1}{n} \ln(n)$ est le maximum global de la fonction $g|_C$.

La fonction $g|_C$ possède donc un unique extremum local, égal à $n \ln \frac{1}{n}$. C'est un maximum global atteint en un unique point : $\left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n} \right)$.

121. C1 Mines Ponts

Mots-clés : groupe symplectique, espace tangent

Soient un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et la matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ définie par blocs.

- On note Sp_{2n} l'ensemble des matrices symplectiques, défini par : $Sp_{2n} = \{M \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R}) \mid M^T J M = J\}$. Montrer que Sp_{2n} est un sous-groupe de $GL_{2n}(\mathbb{R})$.

- (b) On note H_{2n} l'ensemble des matrices hamiltoniennes, défini par : $H_{2n} = \{A \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R}) \mid A^T J + JA = 0\}$. Montrer que H_{2n} est un *sev* de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$. Quelle est sa dimension ? (On pourra écrire la matrice $A \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ par blocs.)
- (c) Soit $A \in H_{2n}$. Montrer que : $\forall t \in \mathbb{R}, e^{tA} \in Sp_{2n}$.
- (d) En déduire que H_{2n} est inclus dans l'espace tangent à Sp_{2n} en I_{2n} . Cette inclusion est-elle une égalité ?

SOLUTION. —

- (a) On vérifie que $I_{2n} \in Sp_{2n}$ et que $M_1 M_2 \in Sp_{2n}$ si $(M_1, M_2) \in Sp_{2n}^2$. Enfin, si $M \in Sp_{2n}$, alors $\det(M^T J M) = \det J$, d'où $\det(M)^2 \cdot \det J = \det J$. Or la matrice J est inversible ($J^T = -J = J^{-1}$). D'où $\det M \neq 0$, donc la matrice M est inversible. D'où $(M^{-1})^T \cdot (M^T J M) \cdot M^{-1} = (M^{-1})^T \cdot J \cdot M^{-1}$, donc $J = (M^{-1})^T \cdot J \cdot M^{-1}$. Donc Sp_{2n} est un sous-groupe de $GL_{2n}(\mathbb{R})$.
- (b) On décompose la matrice $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}$ en blocs $n \times n$. Alors $A^T J + JA = 0 \iff A_2 \in S_n(\mathbb{R})$ et $A_3 \in S_n(\mathbb{R})$ et $A_4 = -A_1^T$. Donc H_{2n} est un *sev* de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et sa dimension est $2 \times \dim S_n(\mathbb{R}) + \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = 2 \times \frac{n(n-1)}{2} + n^2$.
- (c) Soit $M(t) = e^{tA}$. D'une part, $M(0) = I_{2n} \in Sp_{2n}$. D'autre part, la fonction M est dérivable et $M'(t) = A \cdot M(t)$. D'où $\frac{d}{dt} [M(t)^T J M(t)] = M'(t)^T J M(t) + M(t)^T J M'(t) = M(t)^T (A^T J + JA) M(t) = 0$ car la matrice A est hamiltonienne. Finalement, $\forall t \in \mathbb{R}, M(t)^T J M(t) = M(0)^T J M(0) = J$, donc la matrice $M(t)$ est symplectique.
- (d) L'espace tangent à $Sp_{2n}(\mathbb{R})$ en I_{2n} , noté $T_{I_{2n}} Sp_{2n}(\mathbb{R})$, est, par définition, l'ensemble des vecteurs vitesses $M'(0)$ où $M :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ est un arc de classe \mathcal{C}^1 tel que $M(0) = I_{2n}$ et $M(t) \in Sp_{2n}(\mathbb{R})$ pour tout t .
Soit $A \in H_{2n}$. D'après la question précédente, l'arc $M : t \mapsto e^{tA}$ est un arc qui convient. Or $M'(0) = A$. Donc la matrice A est un vecteur tangent à Sp_{2n} . Réciproquement, soit A un vecteur tangent : si M est un arc qui convient, alors $M(t) J M(t) = J$ pour tout t . D'où (en dérivant) $M'(t)^T J M(t) + M(t)^T J M'(t) = 0$ pour tout t . En particulier, pour $t = 0$, $A^T J I_{2n} + I_{2n} J A = 0$. Donc $A \in H_{2n}$. Donc $H_{2n} = T_{I_{2n}} Sp_{2n}(\mathbb{R})$.

122. RMS 2026 1233 Centrale MP MPI

Soit U un ouvert d'un espace vectoriel normé E de dimension finie, soient a et b deux points distincts de U tels que le segment $[a, b]$ est inclus dans U .

- (a) Soit $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $g(b) - g(a) = dg(c) \cdot (b - a)$. (On pourra utiliser la fonction $\varphi : t \mapsto g(tb + (1-t)a)$.)
- (b) Soit $f : U \rightarrow F$, où F est un espace euclidien. On suppose que la fonction f est différentiable sur U et que sa différentielle $df : x \mapsto df(x)$ est bornée sur U . Montrer que $\|f(b) - f(a)\| \leq \sup_{x \in [a, b]} \|df(x)\|_{\text{op}} \times \|b - a\|$. (On pourra utiliser un vecteur $v \in F$ et la fonction $x \in U \mapsto \langle f(x), v \rangle \in \mathbb{R}$.)

SOLUTION. — (Voir aussi l'exercice 116.)

- (a) On se ramène à une variable grâce à la fonction $M : t \in [0, 1] \mapsto tb + (1-t)a$ qui vérifie $M(0) = a$ et $M(1) = b$ et est dérivable : $\forall t \in [0, 1], M'(t) = b - a$. La fonction d'une variable $\varphi = g \circ M$ (qui est bien définie car $[a, b] \subset U$ par hypothèse) vérifie $\varphi(0) = g(a)$ et $\varphi(1) = g(b)$ et est dérivable d'après la règle de la chaîne :

$$\forall t \in [0, 1], \quad \varphi'(t) = \langle \nabla g(M(t)), M'(t) \rangle = \langle \nabla g(M(t)), x - y \rangle = dg((1-t)a + tb) \cdot (b - a).$$

D'après le théorème des accroissements finis (valable car φ est continue sur $[0, 1]$ et dérivable sur $]0, 1[$), il existe $t_0 \in]0, 1[$ tel que $\varphi(1) - \varphi(0) = (1-0)\varphi'(t_0)$. En notant c le point $\varphi(t_0) \in]a, b[$, il vient $g(b) - g(a) = dg(c) \cdot (b - a)$.

- (b) La fonction $g : x \in U \mapsto \langle f(x), v \rangle \in \mathbb{R}$ est définie de U vers \mathbb{R} et

$$g(x+h) = \langle f(x+h), v \rangle = \langle f(x) + df(x) \cdot h + o(h), v \rangle = \underbrace{\langle f(x), v \rangle}_{=g(x)} + \underbrace{\langle df(x) \cdot h, v \rangle}_{=\ell(h)} + \underbrace{\langle o(h), v \rangle}_{=o(h)}.$$

Or $\ell : h \mapsto \ell(h)$ est linéaire par linéarité de $df(x)$ et par linéarité à gauche du produit scalaire. Et, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $|\langle o(h), v \rangle| \leq \|o(h)\| \times \|v\|$ est bien un $o(h)$. D'où g est différentiable en tout $x \in U$ et $\forall h \in U, dg(x) \cdot h = \langle df(x) \cdot h, v \rangle$.

On peut donc appliquer à g la question précédente : $\exists c \in]a, b[, \quad g(b) - g(a) = dg(c) \cdot (b - a) = \langle df(c) \cdot (b - a), v \rangle$.

D'où $|\langle f(b) - f(a), v \rangle| = |\langle df(c) \cdot h, v \rangle| \leq \|df(c) \cdot (b - a)\| \times \|v\|$ d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz. De plus, $\|df(c) \cdot (b - a)\| \leq \|df(c)\|_{\text{op}} \times \|b - a\|$ par définition de la norme subordonnée. Et $\|df(c)\|_{\text{op}} \leq \sup_{x \in [a, b]} \|df(x)\|_{\text{op}}$ car df est bornée par hypothèse. Donc $|\langle f(b) - f(a), v \rangle| \leq \sup_{x \in [a, b]} \|df(x)\|_{\text{op}} \times \|b - a\| \times \|v\|$.

Si $f(b) = f(a)$, alors il n'y a rien à prouver. Si $f(b) \neq f(a)$, alors on applique l'inégalité précédente en choisissant $v = f(b) - f(a)$ puis on divise par $\|v\| > 0$.

123. RMS 2026 800 Mines-Ponts MP MPI

Soit $f : x \in \mathbb{R}^n \mapsto (f_1(x), \dots, f_n(x)) \in \mathbb{R}^n$.

- (a) On suppose f de classe \mathcal{C}^2 . Montrer que $J_f(x)$ est antisymétrique pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ si, et seulement si, il existe $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$ tels que $f(x) = Ax + b$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.
- (b) On suppose f de classe \mathcal{C}^1 . Montrer que $J_f(x)$ est symétrique pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ si, et seulement si, il existe $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 telle que $f = \nabla g$. (On pourra étudier le gradient de la fonction $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto \sum_{k=1}^n x_k \int_0^1 f_k(tx) dt$.)

SOLUTION. —

- (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $J_f(x)$ est la matrice dans la base canonique de \mathbb{R}^n de la différentielle de f en x que l'on note $df(x)$. La condition est suffisante car si, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $f(x) = Ax + b$ avec A antisymétrique, alors f est de classe \mathcal{C}^1 et $df(x) : h \mapsto Ah$ donc $J_f(x) = A$.

Preuve du sens direct. On suppose que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $J_f(x)$ est antisymétrique. Alors,

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, \partial_i f_j(x) = -\partial_j f_i(x)$$

Comme f est classe \mathcal{C}^2 , il en est de même pour les fonctions f_1, \dots, f_n et on peut dériver ces relations. Il vient

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall (i, j, k) \in \{1, \dots, n\}^3, \partial_{k,i} f_j(x) = -\partial_{k,j} f_i(x)$$

et donc, en appliquant le théorème de Schwarz (les fonctions sont de classe \mathcal{C}^2) puis de nouveau que $J_f(x)$ est antisymétrique puis encore Schwarz, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall (i, j, k) \in \{1, \dots, n\}^3, \partial_{i,k} f_j(x) = -\partial_{k,j} f_i(x) = \partial_{i,j} f_k(x) = \partial_{j,i} f_k(x)$$

i.e. une invariance par permutation circulaire sur les indices. Donc en refaisant de même, on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall (i, j, k) \in \{1, \dots, n\}^3, \partial_{k,j} f_i(x) = \partial_{i,k} f_j(x) = -\partial_{j,k} f_i(x) = -\partial_{k,j} f_i(x)$$

et donc $\forall (i, j, k) \in \{1, \dots, n\}^3, \partial_{k,j} f_i = 0$. Comme \mathbb{R}^n est convexe donc connexe par arcs, pour tout $(i, j), \partial_i f_j$ est constante et, pour tout $x \in \mathbb{R}^n, J_f(x) = J_f(0) =: A$. On en déduit que f et $x \in \mathbb{R}^n \mapsto Ax$ ont même différentielle donc différent d'une constante $b \in \mathbb{R}^n$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a $f(x) = Ax + b$.

- (b) Raisonnons par double implication.

La condition est suffisante car si $f = \nabla g$ avec g de classe \mathcal{C}^2 , alors f est bien de classe \mathcal{C}^1 et si on note $f = (f_1, \dots, f_n)$ alors, pour tout $i, f_i = \partial_i g$ et donc,

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, \partial_j f_i = \partial_{j,i} g$$

d'où en appliquant le théorème de Schwarz à g de classe \mathcal{C}^2 , on a

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, \partial_j f_i = \partial_{i,j} g = \partial_i f_j$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}^n, J_f(x)$ est symétrique.

Preuve du caractère nécessaire. Si on avait $n = 1$ cela reviendrait à chercher g telle que $g' = f$ et on poserait naturellement

$$g(x) = \int_0^x f(t) dt = x \int_0^1 f(tx) dt$$

Dans le cas général posons donc $f = (f_1, \dots, f_n)$ et

$$g : x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto \sum_{k=1}^n x_k \int_0^1 f_k(tx) dt$$

Fixons $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et utilisons une dérivation sous l'intégrale pour montrer que $\partial_i g$ est bien définie et la calculer. Nous démontrerons pour cela un énoncé plus général. Soit $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 . On se propose de montrer que $x \mapsto \int_0^1 F(x, t) dt$ est définie et dérivable sur \mathbb{R} , et de dérivée $x \mapsto \int_0^1 \partial_1 F(x, t) dt$.

— On sait par composition que $x \mapsto F(x, t)$ est de classe \mathcal{C}^1 pour tout $t \in \mathbb{R}$.

- Puisque F est de classe \mathcal{C}^1 , les fonctions $t \mapsto F(x, t)$ et $t \mapsto \partial_1 F(x, t)$ sont continues, donc intégrables sur le segment $[0, 1]$, quel que soit $x \in \mathbb{R}$.
- Soit K un segment de \mathbb{R} . Alors $K \times [0, 1]$ est compact (produit de compacts) donc la fonction continue $\partial_1 F$ y est bornée par une constante M . On dispose donc de la domination locale $\forall x \in K, \forall t \in [0, 1], |\partial_1 F(x, t)| \leq M$, où $t \mapsto M$ est intégrable sur $[0, 1]$.

Ainsi, le résultat annoncé s'obtient par dérivation sous l'intégrale.

Fixons maintenant $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$ dans \mathbb{R} , et $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Le résultat précédent s'applique à $(x_i, t) \mapsto f_k(tx_1, \dots, tx_n)$, qui est bien de classe \mathcal{C}^1 par composition, et de première dérivée partielle $(x_i, t) \mapsto t \partial_i f_k(tx_1, \dots, tx_n)$. On en déduit que g admet une dérivée partielle selon la i -ème variable, et

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \partial_i g(x) = \int_0^1 f_i(tx) dt + \sum_{k=1}^n x_k \int_0^1 t \partial_i f_k(tx) dt$$

Fixons $x \in \mathbb{R}^n$.

Pour tout $y \in \mathbb{R}^n$, puisque $J_f(y)$ est symétrique on a $\partial_i f_k(y) = \partial_k f_i(y)$ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, donc

$$\partial_i g(x) = \int_0^1 \left(f_i(tx) + \sum_{k=1}^n x_k t \partial_k f_i(tx) \right) dt = \int_0^1 \frac{d}{dt} (t f_i(tx)) dt = f_i(x)$$

Par suite, $\partial_i g$ est continue. Cela vaut pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, donc g est de classe \mathcal{C}^1 et $\nabla g = f$.

3 Probabilités

124. RMS 2017 482 X ESPCI PC & RMS 2018 518 X ESPCI PC

On place aléatoirement $n \geq 3$ boules dans n urnes. Calculer la probabilité qu'une seule urne soit vide.

SOLUTION. — L'univers est l'ensemble Ω des applications de $\llbracket 1, n \rrbracket$ (l'ensemble des boules) dans $\llbracket 1, n \rrbracket$ (l'ensemble des urnes) et il y a équiprobabilité. On a

$$\text{Card } \Omega = n^n.$$

Construire un résultat favorable à l'événement V qui nous intéresse, c'est :

- choisir une urne qui sera vide, il y a n manières ;
- choisir une urne qui contiendra deux boules, il y a $n - 1$ manières ;
- choisir les deux boules que contiendra cette urne, il y a $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ choix ;
- placer une des $n - 2$ boules restantes dans chacune des $n - 2$ urnes restantes, il y a $(n - 2)!$ manières.

Le nombre de résultats favorables est donc $n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2)! \cdot \binom{n}{2} = n! \binom{n}{2}$. La probabilité cherchée vaut donc

$$P(V) = \frac{\text{Card } V}{\text{Card } \Omega} = \frac{\binom{n}{2} n!}{n^n}.$$

REMARQUE. — La formule de Stirling donne l'équivalent $P(V) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}} n^{5/2} e^{-n}$ quand n tend vers l'infini.

125. RMS 2017 900 Mines Ponts PC, RMS 2016 615 Mines Ponts PC

On lance deux dés équilibrés. Soient U_1 et U_2 deux variables aléatoires correspondant aux résultats des lancers des dés 1 et 2. On pose $X = \min\{U_1, U_2\}$ et $Y = \max\{U_1, U_2\}$.

- Déterminer $P(X \geq k)$ et $P(Y \geq k)$ pour chaque $k \in \llbracket 1, 6 \rrbracket$.
- Calculer XY en fonction de U_1 et U_2 et en déduire que $E(XY) = \left(\frac{7}{2}\right)^2$.

SOLUTION. — \triangleright **Stratégie du max :** $(Y \leq k) = (U_1 \leq k) \cap (U_2 \leq k)$. Voir aussi l'exercice 136.

- La variable X est à valeurs dans $\llbracket 1, 6 \rrbracket$ et, pour $k \in \llbracket 1, 6 \rrbracket$, on a $(X \geq k) = (U_1 \geq k) \cap (U_2 \geq k)$. Par indépendance et équiprobabilité, on en déduit que $P(X \geq k) = [P(U_1 \geq k)]^2 = \left(\frac{6-k+1}{6}\right)^2 = \left(\frac{7-k}{6}\right)^2$.

De $(Y \geq k) = (U_1 \geq k) \cup (U_2 \geq k)$, on déduit que $P(Y \geq k) = P[(U_1 \geq k) \cup (U_2 \geq k)] = P(U_1 \geq k) + P(U_2 \geq k) - P[(U_1 \geq k) \cap (U_2 \geq k)] = P(U_1 \geq k) + P(U_2 \geq k) - P(X \geq k)$.

- On a $XY = U_1 U_2$ et, par indépendance, $E(U_1 U_2) = [E(U_1)]^2 = \left(\frac{7}{2}\right)^2$.

126. RMS 2017 1353 CCP PSI

Deux joueurs jouent avec des pièces équilibrées. Ils lancent chacun n fois une pièce. Celui qui gagne est celui qui obtient le plus grand nombre de fois pile. Quelle est la probabilité qu'il y ait un gagnant ? On pourra utiliser (et éventuellement démontrer) l'égalité $\sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}$.

SOLUTION. — \triangleright **Stratégie du contraire.** On note G l'événement «Il y a un gagnant» et E l'événement «Il y a égalité». Notons X (resp Y) la variable aléatoire donnant le nombre de pile du premier (resp deuxième) joueur. Ces variables aléatoires suivent une loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{2}$. Par réunion disjointe et par l'indépendance (implicite) de X et Y :

$$P(G) = 1 - P(E) = 1 - P\left(\bigcup_{i=0}^n (X = i) \cap (Y = i)\right) = 1 - \sum_{i=0}^n P((X = i) \cap (Y = i)) = 1 - \sum_{i=0}^n P(X = i)P(Y = i).$$

On en déduit que

$$P(G) = 1 - \sum_{i=0}^n \left[\binom{n}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]^2 = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2 = 1 - \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n}.$$

REMARQUE : L'identité $\sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}$ se démontre par exemple en écrivant que le coefficient de x^n dans le produit $(1+x)^n \times (1+x)^n$ est le même que dans $(1+x)^{2n}$.

127. RMS 2021 132 1190 CCP PSI 2021, RMS 2018 129 207 CCP PSI 2018

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{N} , indépendantes, de même loi et admettant une variance. On suppose que la variable aléatoire $Z = X + Y + 1$ suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$.

- (a) Déterminer l'espérance et la variance de X .
- (b) Calculer la fonction génératrice de X sur $]0, 1[$.
- (c) En déduire la loi de X .

SOLUTION. — Notons $q = 1 - p$.

- (a) $E(Z) = E(X) + E(Y) + 1 = 2E(X) + 1$ car l'espérance est linéaire et les *v.a.* X et Y suivent la même loi. De plus, $E(Z) = \frac{1}{p}$ car Z suit la loi $\mathcal{G}(p)$. Donc $E(X) = \frac{q}{2p}$.
 $V(Z) = V(X + Y + 1) = V(X + Y)$. De plus $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$ car X et Y sont indépendantes. D'où $V(Z) = 2V(X)$ car X et Y suivent la même loi. Enfin, $V(Z) = \frac{q}{p^2}$ car Z suit la loi $\mathcal{G}(p)$. Donc $V(X) = \frac{q}{2p^2}$.
- (b) Pour tout $t \in \left] \frac{-1}{q}, \frac{+1}{q} \right[$, $G_Z(t) = \frac{pt}{1-qt}$ car Z suit la loi $\mathcal{G}(p)$. Or $G_Z(t) = tG_{X+Y}(t)$ et, pour tout $t \in \left] -1, +1 \right[$, $G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t)$ car X et Y sont indépendantes. D'où $G_Z(t) = t[G_X(t)]^2$, pour tout $t \in \left] -1, +1 \right[$. Par suite, $G_X(t) = \frac{\sqrt{pt}}{\sqrt{1-qt}}$ pour tout $t \in]0, 1[$.
- (c) Pour tout $x \in \left] -1, +1 \right[$, $(1+x)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, où $a_n = \frac{(-1)^n (2n)!}{4^n n!^2}$. D'où, pour tout $t \in]0, 1[$, $G_X(t) = \sqrt{p} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (-qt)^n = \sum_{n=1}^{\infty} p_n t^n$, où $p_n = \sqrt{p} \frac{(2n)!}{4^n n!^2}$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(X = n) = p_n = \sqrt{p} \frac{(2n)!}{4^n n!^2}$.

128. RMS 2016 964 CCP PSI

On considère une urne contenant $n - 1$ boules noires et une boule blanche.

- (a) On effectue une succession de tirages avec remise dans cette urne et on note T la variable aléatoire donnant le rang du premier tirage amenant la boule blanche. Donner les valeurs prises par T , sa loi, son espérance et sa variance.
- (b) On effectue maintenant des tirages sans remise.
 - i. Soit X la variable aléatoire donnant le rang du premier tirage amenant la boule blanche. Donner les valeurs prises par X , sa loi, son espérance et sa variance.
 - ii. Soit Y la variable aléatoire donnant le nombre de boules noires restantes dans l'urne après le tirage de la boule blanche. Exprimer Y en fonction de X et n . Donner l'espérance de Y ainsi que sa variance.

SOLUTION. —

- (a) La variable aléatoire T mesure le temps d'attente du 1^{er} succès lors d'une suite d'expériences de BERNOULLI indépendantes (car « avec remise ») de paramètre $p = \frac{1}{n}$. Donc

$$T \sim \mathcal{G}\left(\frac{1}{n}\right), \quad E(T) = \frac{1}{p} = n \quad \text{et} \quad V(T) = \frac{1-p}{p^2} = n(n-1).$$

- (b) i. À l'issue du k -ième tirage infructueux, l'urne contient $(n - k - 1)$ boules noires et la blanche, à l'issue du $(n - 1)$ -ième tirage infructueux, l'urne ne contient plus que la boule blanche et donc le n -ième tirage est nécessairement un succès, donc $X(\Omega) = \{1, \dots, n\}$.

Pour $1 \leq k \leq n$, $(X = k) = (\cap_{i=1}^{k-1} \overline{B}_i) \cap B_k$ donc, avec la formule des probabilités composées,

$$P(X = k) = P(\overline{B}_1) \cdot P(\overline{B}_2 | \overline{B}_1) \dots P(\overline{B}_{k-1} | \overline{B}_1 \cap \dots \cap \overline{B}_{k-2}) \cdot P(B_k | \overline{B}_1 \cap \dots \cap \overline{B}_{k-1}).$$

Or il est sous-entendu que la probabilité du k -ième tirage est uniforme, c'est-à-dire $P(\overline{B}_i | \overline{B}_1 \cap \dots \cap \overline{B}_{i-1}) = \frac{n-i}{n-i+1}$ (1 boule blanche parmi $n - i + 1$), donc $P(X = k) = \prod_{i=1}^{k-1} \frac{n-i}{n-i+1} \cdot \frac{1}{n-k+1} = \frac{1}{n}$:

$$X \sim \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket), \quad E(X) = \frac{n+1}{2} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{n^2-1}{12}.$$

- ii. Si la boule blanche est tirée au k -ième tirage, $X = k$, on a retiré $(k - 1)$ boules noires de l'urne, il en reste donc $Y = (n - 1) - (k - 1) = n - X$ dans l'urne après ce k -ième tirage, donc $E(Y) = n - E(X) = \frac{n+1}{2}$ et $V(Y) = V(X) = \frac{n^2-1}{12}$.

129. RMS 2016 614 Mines Ponts PC v2026

- (a) Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$.
Montrer que $\frac{1}{X}$ est d'espérance finie et calculer $E(\frac{1}{X})$.
- (b) Soit A l'ensemble des v.a. non constantes et strictement positives telles que $X \in L^1$ et $\frac{1}{X} \in L^1$.
Étudier $\inf_{X \in A} E(X)E(\frac{1}{X})$.

SOLUTION. —

- (a) La série $\sum \frac{1}{k} \mathbb{P}(X = k) = \frac{p}{1-p} \sum \frac{1}{k} (1-p)^k$ cv absolument car c'est le DSE de la fonction $x \mapsto \ln(1-x)$ et $p \in]0, 1[$ est bien dans l'intervalle de convergence $] -1, +1[$. Donc, d'après le théorème de transfert, $\frac{1}{X} \in L^1$ et

$$E\left(\frac{1}{X}\right) = \frac{p}{1-p} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} (1-p)^k = -\frac{p}{1-p} \ln(1 - (1-p)) = -\frac{p \ln p}{1-p}.$$

- (b) D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $E\left(\sqrt{X} \frac{1}{\sqrt{X}}\right)^2 \leq E(X)E\left(\frac{1}{X}\right)$. Donc 1 est un minorant et c'est le plus grand d'après la question précédente car : si $X \sim \mathcal{G}(p)$, alors $E(X)E\left(\frac{1}{X}\right) = \frac{\ln(p)}{p-1} \geq 1$ pour tout $p \in]0, 1[$ et $\frac{\ln(p)}{p-1} \xrightarrow{p \rightarrow 1^-} 1$.

130. RMS 2017 1358 CCP PSI

Soit $n \geq 2$. On effectue des tirages avec remise dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n . On note X_n le rang du premier tirage où l'on obtient une boule différente de la première boule tirée.

- (a) Établir la loi de la variable aléatoire X_n .
(b) Justifier l'existence de l'espérance de X_n et la calculer.

SOLUTION. — On suppose $n \geq 2$.

- (a) Appelons, à partir du second tirage, «succès» le fait de tirer une boule différente de la première. La probabilité de succès est $\frac{n-1}{n}$, et $T_n = X_n - 1$ mesure le temps d'attente du premier succès dans une suite d'épreuves de Bernoulli indépendantes (car « avec remise »). Donc T_n est une variable aléatoire discrète de loi géométrique $\mathcal{G}(\frac{n-1}{n})$.

On en déduit que $X_n = T_n + 1$ est une variable aléatoire discrète de loi donnée par $X_n(\Omega) = \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et pour tout $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$,

$$P(X_n = k) = P(T_n = k - 1) = \frac{n-1}{n} \left(1 - \frac{n-1}{n}\right)^{k-2} = \frac{n-1}{n^{k-1}}.$$

- (b) On sait que la variable T_n admet pour espérance et $E(T_n) = \frac{n}{n-1}$ (loi géométrique) donc, par linéarité, X_n admet une espérance, et

$$E(X_n) = 1 + \frac{n}{n-1} = \frac{2n-1}{n-1}.$$

131. RMS 2016 967 ENSEA PSI

Soit X une variable aléatoire telle que $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$. Montrer que $E(|X - \lambda|) = 2e^{-\lambda} \frac{\lambda^{N+1}}{N!}$, avec $N = \lfloor \lambda \rfloor$.

SOLUTION. — Par linéarité :

$$E(X - \lambda) = E(X) - \lambda = 0.$$

Posons $N = \lfloor \lambda \rfloor$. Par le théorème de transfert,

$$E(|X - \lambda|) = \sum_{n=0}^{+\infty} |n - \lambda| e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} = \sum_{n=0}^N (\lambda - n) e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} + \sum_{n=N+1}^{+\infty} (n - \lambda) e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} = S_1 + S_2,$$

et on a $S_2 - S_1 = E(X - \lambda) = 0$. De plus, $S_1 = \sum_{n=0}^N (\lambda - n) e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} = \lambda e^{-\lambda} \left(\sum_{n=0}^N \frac{\lambda^n}{n!} - \sum_{n=1}^N \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} \right) = \lambda e^{-\lambda} \frac{\lambda^N}{N!}$, donc

$$E(|X - \lambda|) = 2S_1 = 2e^{-\lambda} \frac{\lambda^{N+1}}{N!}.$$

132. RMS 2017 1357 CCP PSI

Dans un casino, une machine renvoie un entier naturel N non nul selon la loi de probabilité : $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(N = n) = \frac{1}{2^n}$. Le joueur gagne N jetons si N est pair ; il perd N jetons si N est impair.

- (a) Quelle est la probabilité de gagner ?
- (b) Déterminer l'espérance de la variable aléatoire G égale au gain algébrique du joueur.

SOLUTION. —

- (a) L'événement (N est pair) est l'union disjointe $\cup_{i \in \mathbb{N}^*} (N = 2i)$. La probabilité de gagner est donc

$$P(N \text{ est pair}) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(N = 2k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{4^k} = \frac{1/4}{1 - 1/4} = \frac{1}{3}.$$

- (b) Sous réserve que la *v.a.* G possède une espérance, *i.e.* sous réserve que la série numérique $\sum \frac{(-1)^n n}{2^n}$ converge absolument, l'espérance de G vaudra $E(G) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n}{2^n}$. Or pour tout $x \in]-1; 1[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}$. On peut dériver terme à terme une série entière sans changer son rayon de convergence, d'où $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n n x^{n-1} = \frac{-1}{(1+x)^2}$, donc $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n n x^n = \frac{-x}{(1+x)^2}$. Ainsi,

$$E(G) = \frac{-1/2}{(1 + 1/2)^2} = -\frac{2}{9}.$$

133. RMS 2017 901 Mines Ponts PC

On lance une pièce qui a une probabilité p de donner pile. On note X le nombre de lancers nécessaires pour obtenir deux fois pile. Déterminer la loi de X et la fonction génératrice G_X de X . Calculer $E(X)$.

SOLUTION. —

$$(X = n) = \bigcup_{k=1}^{n-1} [(X_1 = 0) \cap \dots \cap (X_k = 0) \cap (X_k = 1) \cap (X_{k+1} = 0) \cap \dots \cap (X_{n-1} = 0) \cap (X_n = 1)],$$

où $(X_i = 1)$ pour pile au i -ième coup (succès) et $(X_i = 0)$ pour face au i -ième coup (échec). L'union est disjointe et les événements intersectés sont indépendants :

$$P(X = n) = (n - 1)p^2 q^{n-2}.$$

On en déduit la fonction génératrice de X : pour tout $t \in]-\frac{1}{q}, \frac{1}{q}[$,

$$\begin{aligned} G_X(t) &= \sum_{n=2}^{+\infty} P(X = n) t^n = (pt)^2 \sum_{n=1}^{+\infty} n (qt)^{n-1} = \frac{(pt)^2}{q} \frac{d}{dt} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} (qt)^n \right) = \frac{(pt)^2}{q} \frac{d}{dt} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (qt)^n \right) = \frac{(pt)}{q} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{1-qt} \right) \\ &= \left(\frac{pt}{1-qt} \right)^2. \end{aligned}$$

Comme G_X est la somme d'une série entière de rayon de convergence $\frac{1}{q} > 1$, elle est dérivable en 1, donc X admet une espérance, donnée par $E(X) = G'_X(1) = 2f(1)f'(1)$, où $f(t) = \frac{pt}{1-qt}$. Donc $E(X) = \frac{2}{p}$.

134. RMS 2016 803 Centrale PSI

Trois individus jouent au ballon :

- si A possède la balle, il l'envoie à B avec probabilité $\frac{1}{3}$ et à C avec probabilité $\frac{2}{3}$,
- si B possède la balle, il l'envoie à A avec probabilité $\frac{2}{3}$ et à C avec probabilité $\frac{1}{3}$,
- si C possède la balle, il l'envoie à B avec probabilité $\frac{2}{3}$ et à A avec probabilité $\frac{1}{3}$.

On note A_n l'événement : le joueur A reçoit le ballon au n -ième lancer, et on définit de même B_n, C_n . Étudier la limite des suites $P(A_n), P(B_n)$ et $P(C_n)$.

SOLUTION. —

- (a) La formule des probabilités totales donne $P(A_{n+1}) = P(A_n)P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(A_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(A_{n+1}) = 0 \cdot P(A_n) + \frac{1}{3}P(B_n) + \frac{2}{3}P(C_n)$. De même $P(B_{n+1}) = \frac{1}{3}P(A_n) + 0 \cdot P(B_n) + \frac{1}{3}P(C_n)$ et $P(C_{n+1}) = \frac{2}{3}P(A_n) + \frac{2}{3}P(B_n) + 0 \cdot P(C_n)$. On obtient donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$X_{n+1} = MX_n, \quad \text{avec} \quad M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X_n = \begin{pmatrix} P(A_n) \\ P(B_n) \\ P(C_n) \end{pmatrix}.$$

La matrice M a pour polynôme caractéristique $X^3 - \frac{7}{9}X - \frac{2}{9} = (X-1)(X+\frac{1}{3})(X+\frac{2}{3})$, donc M est diagonalisable. Soit $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ une base formée de vecteurs propres associés aux valeurs propres respectives $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -\frac{1}{3}, \lambda_3 = -\frac{2}{3}$. Dans cette base, X_0 s'écrit : $X_0 = x\varepsilon_1 + y\varepsilon_2 + z\varepsilon_3$. Par récurrence, $X_n = M^n X_0 = x\lambda_1^n \varepsilon_1 + y\lambda_2^n \varepsilon_2 + z\lambda_3^n \varepsilon_3 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x\varepsilon_1$.

Reste à déterminer le scalaire x et le vecteur ε_1 :

- en résolvant le système d'équations, $MX = 1X$, on obtient que $\varepsilon_1 = (7 \ 5 \ 8)^T$ en est une solution ;
- en remarquant que, pour chaque n , la somme $P(A_n) + P(B_n) + P(C_n)$ des coordonnées de X_n vaut 1, on conclut qu'il en est de même en passant à la limite, d'où $x \cdot (7 + 5 + 8) = 1$.

Donc

$$P(A_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{7}{20}, \quad P(B_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{5}{20} \quad \text{et} \quad P(C_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{8}{20}.$$

135. RMS 2017 1355 CCP PSI

Mots-clés : la loi du 0 - 1 de Borel

Soit (A_n) une suite d'événements indépendants.

- (a) Soient $n, p \in \mathbb{N}$. Montrer que la probabilité qu'aucun des événements A_n, \dots, A_{n+p} ne se réalise est inférieure ou égale à $\exp(-\sum_{k=n}^{n+p} P(A_k))$.
- (b) On suppose que la série de terme général $P(A_n)$ est divergente. Montrer qu'il est presque impossible qu'il n'y ait qu'un nombre fini d'entiers n pour lesquels A_n est réalisé.
- (c) Montrer que, si la série de terme général $P(A_n)$ converge, alors il est presque certain qu'il n'y ait qu'un nombre fini d'entiers n pour lesquels A_n est réalisé.

SOLUTION. —

- (a) L'événement "aucun des A_n, \dots, A_{n+p} ne se réalise" est l'événement $\bigcap_{k=n}^{n+p} \overline{A_k}$, qui par indépendance, est de probabilité $\prod_{k=n}^{n+p} P(\overline{A_k}) = \prod_{k=n}^{n+p} (1 - P(A_k))$.

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} \geq 1 - x$ (faire un dessin), donc $e^{-P(A_k)} \geq 1 - P(A_k)$ et, par produit de termes positifs, $\exp(-\sum_{k=n}^{n+p} P(A_k)) = \prod_{k=n}^{n+p} e^{-P(A_k)} \geq \prod_{k=n}^{n+p} (1 - P(A_k))$, d'où le résultat.

- (b) Notons B_n^p l'événement envisagé en (a), et $B_n = \bigcap_{p=0}^{+\infty} B_n^p$ l'événement «aucun des A_k n'est réalisé pour $k \geq n$ ». La suite $(B_n^p)_{p \in \mathbb{N}}$ est décroissante pour l'inclusion, donc par continuité décroissante, $P(B_n) = \lim_{p \rightarrow +\infty} P(B_n^p)$.

Or par hypothèse, la série $\sum_{k \geq n} P(A_k)$ diverge. Comme elle est à termes positifs, cela implique que ses sommes partielles $\sum_{k=n}^{n+p} P(A_k)$ tendent vers $+\infty$ (quand $p \rightarrow +\infty$), donc par (a), $P(B_n) = 0$.

L'événement B : «il y a un nombre fini d'entiers k pour lesquels A_k est réalisé» est l'événement $B = \bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n$. Donc par sous-additivité, $P(B) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} P(B_n) = 0$, et ainsi $P(B) = 0$.

- (c) À l'inverse si la série de terme général $P(A_n)$ converge, alors il est presque certain qu'il n'y ait qu'un nombre fini d'entiers n pour lesquels A_n est réalisé : avec les notations ci-dessus, $\overline{B} \subset \overline{B_n} = \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k$, donc par sous-additivité, $P(\overline{B}) \leq \sum_{k=n}^{+\infty} P(A_k)$, et ceci étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $P(\overline{B}) = 0$. C'est la loi du 0 - 1 de Borel.

136. RMS 2016 630 Mines Ponts PC, RMS 2017 914 Mines Ponts PC

Mots-clés : maximum de lois géométriques indépendantes

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. Soit $Z = \max(X, Y)$. Déterminer l'espérance de Z .

SOLUTION. — \triangleright **Stratégie du max** : $(Z \leq k) = (X \leq k) \cap (Y \leq k)$. Voir aussi l'exercice 125.

- La réunion disjointe $(X \leq n) = \cup_{k=1}^n (X = k)$ donne, en notant $q = 1 - p$:

$$\mathbb{P}(X \leq n) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^n p(1-p)^{k-1} = p \frac{1 - (1-p)^n}{1 - (1-p)} = 1 - q^n.$$

- Comme $Z = \max(X, Y)$, on a $(Z \leq n) = (X \leq n) \cap (Y \leq n)$ et comme X et Y sont indépendantes :

$$\mathbb{P}(Z \leq n) = \mathbb{P}(X \leq n)\mathbb{P}(Y \leq n) = \mathbb{P}(X \leq n)^2 = (1 - q^n)^2.$$

- Enfin la variable aléatoire est d'espérance finie car la série numérique $\sum P(Z \geq n)$ converge. Et

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z) &= \sum_{n=1}^{+\infty} P(Z \geq n) = \sum_{n=1}^{+\infty} (1 - P(Z \leq n-1)) = \sum_{n=1}^{+\infty} (1 - (1 - q^{n-1})^2) = \sum_{n=0}^{+\infty} (1 - (1 - q^n)^2) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} q^{2n}(2 + q^n) = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} q^{2n} + \sum_{n=0}^{+\infty} q^{3n} = \frac{2}{1 - q^2} + \frac{1}{1 - q^3}. \end{aligned}$$

137. RMS 2017 192 ENS PC

- Pour tout $\lambda > 0$, soit X_λ une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ . Soit $c > 0$: montrer que $P(|X_\lambda - \lambda| \geq c\lambda) \rightarrow 0$ lorsque $\lambda \rightarrow +\infty$.
- Soient, pour tout $\lambda > 0$, des variables aléatoires indépendantes $A_\lambda, B_\lambda, C_\lambda$ suivant une loi de Poisson de paramètre λ . Étudier l'espérance de $\Delta_\lambda = B_\lambda^2 - 4A_\lambda C_\lambda$.
- Soit $E_\lambda(c) = (|A_\lambda - \lambda| < c\lambda) \cap (|B_\lambda - \lambda| < c\lambda) \cap (|C_\lambda - \lambda| < c\lambda)$. Montrer que $E_\lambda(\frac{1}{3}) \subset (\Delta_\lambda < 0)$.
- Déterminer la limite, lorsque $\lambda \rightarrow +\infty$, de la probabilité que le polynôme $A_\lambda X^2 + B_\lambda X + C_\lambda$ ait toutes ses racines réelles.

SOLUTION. —

- Comme X_λ possède une variance, par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a $P(|X_\lambda - E(X_\lambda)| \geq c\lambda) \leq \frac{V(X_\lambda)}{(c\lambda)^2}$. Comme $E(X_\lambda) = V(X_\lambda) = \lambda$, on obtient

$$P(|X_\lambda - \lambda| \geq c\lambda) \leq \frac{1}{c^2\lambda} \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} 0.$$

- On sait que $V(B_\lambda) = \lambda$, et la formule de König-Huyghens dit que $V(B_\lambda) = E(B_\lambda^2) - [E(B_\lambda)]^2$, donc $E(B_\lambda^2) = \lambda + \lambda^2$. Il en résulte que (en utilisant aussi l'indépendance de A_λ et C_λ) :

$$E(\Delta_\lambda) = E(B_\lambda^2) - 4E(A_\lambda C_\lambda) = E(B_\lambda^2) - 4E(A_\lambda)E(C_\lambda) = \lambda + \lambda^2 - 4\lambda^2 = \lambda - 3\lambda^2.$$

Cette espérance tend vers $-\infty$ quand $\lambda \rightarrow +\infty$, ce qui laisse penser que le polynôme étudié va avoir une probabilité petite d'avoir ses racines réelles quand $\lambda \rightarrow +\infty$.

- $(|Y - \lambda| < c\lambda) = ((1-c)\lambda < Y < (1+c)\lambda)$ avec $(1-c)\lambda > 0$, où Y désigne indifféremment A_λ, B_λ ou C_λ . L'événement $E_\lambda(c)$ implique (en notant que, comme $c \leq 1$, tous les facteurs sont positifs) :

$$\Delta_\lambda < ((1+c)^2 - 4(1-c)^2)\lambda^2 = (1+c+2(1-c))(1+c-2(1-c))\lambda^2 = (3-c)(-1+3c)\lambda^2.$$

On en déduit que $E_\lambda(\frac{1}{3}) \subset (\Delta_\lambda < 0)$

- Par indépendance,

$$P(E_\lambda(c)) = P(|A_\lambda - \lambda| < c\lambda)P(|B_\lambda - \lambda| < c\lambda)P(|C_\lambda - \lambda| < c\lambda) \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} 1.$$

Or, si $c = \frac{1}{3}$, alors on a l'inclusion $E_\lambda(c) \subset (\Delta_\lambda < 0)$, de sorte que $P(\Delta_\lambda < 0) \rightarrow 1$ quand $\lambda \rightarrow +\infty$. Donc la probabilité que $A_\lambda X^2 + B_\lambda X + C_\lambda$ ait toutes ses racines réelles tend vers zéro quand λ tend vers l'infini.

138. RMS 2017 1077 Centrale PSI

Mots-clés : marche aléatoire dans \mathbb{Z}^2

On munit \mathbb{R}^2 de son repère orthonormé que l'on note (O, \vec{i}, \vec{j}) . Un marcheur, initialement en O , se déplace à chaque instant n d'un pas dans l'une des quatre directions (nord, sud, est, ouest) de manière équiprobable. On note $A_n = (X_n, Y_n)$ sa position à l'instant n . On note aussi Z_n la distance du marcheur au point O à l'instant n .

- (a) Déterminer l'espérance et la variance de X_n .
 (b) Les deux variables aléatoires X_n et Y_n sont-elles indépendantes ? Déterminer leur covariance.
 (c) Montrer que $E(Z_n) \leq \sqrt{n}$.
 (d) On admet que $\sum_{i=0}^k \binom{k}{i}^2 = \binom{2k}{k}$. Calculer alors $P(Z_n = 0)$.
 (e) Justifier la relation admise.
- (a) Le pas (U_k, V_k) effectué à l'étape $k \geq 1$ suit la loi uniforme sur l'ensemble $\{(1, 0); (-1, 0); (0, 1); (0, -1)\}$. Cela entraîne que les lois marginales de U_k et V_k sont les mêmes : leur image est $\{-1, 0, 1\}$ et

$$P(U_k = 1) = P(U_k = -1) = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad P(U_k = 0) = \frac{1}{2}.$$

Avec ces notations,

$$\begin{aligned} X_n &= U_1 + \cdots + U_n \\ Y_n &= W_1 + \cdots + W_n. \end{aligned}$$

De la linéarité de l'espérance et de $E(U_k) = 0 = E(V_k)$ pour tout k , on tire que $E(X_n) = E(Y_n) = 0$. De plus les variances s'ajoutent car les variables aléatoires U_k sont deux à deux indépendantes (et de même pour les V_k), or $V(U_k) = \frac{1}{2} = V(V_k)$ pour tout k , d'où $V(X_n) = V(Y_n) = \frac{n}{2}$.

- (b) $Cov(X_n, Y_n) = E(X_n Y_n) - E(X_n)E(Y_n) = E(X_n Y_n)$ car les variables aléatoires X_n et Y_n sont centrées d'après la question précédente.

De plus $X_n Y_n = (U_1 + \cdots + U_n)(V_1 + \cdots + V_n) = \sum_{(i,j) \in [1,n]^2} U_i V_j$. Or, pour tout $i \neq j$, les deux variables U_i et V_j sont indépendantes et par suite $E(U_i V_j) = E(U_i)E(V_j) = 0$. D'où $E(X_n Y_n) = \sum_{i=1}^n E(U_i V_i) = 0$ car $E(U_i V_i) = 0$ pour tout i d'après la loi conjointe énoncée à la première question.

Les variables aléatoires X_n et Y_n sont donc décorrélatées mais elles ne sont pas indépendantes. En effet $P(X_n = n, Y_n = n) = 0$ car l'événement (X_n, Y_n) est impossible tandis que $P(X_n = n)P(Y_n = n) \neq 0$ car $P(X_n = n) = \frac{1}{4^n} = P(Y_n = n)$.

- (c) Comme $Z_n^2 = X_n^2 + Y_n^2$, on a $E(Z_n^2) = E(X_n^2) + E(Y_n^2) = V(X_n) + V(Y_n)$, la dernière égalité résultant de ce que X_n et Y_n sont des variables centrées. La question précédente montre alors que $E(Z_n^2) = n$. Comme une variance est toujours positive, on a $V(Z_n) = E(Z_n^2) - [E(Z_n)]^2 \geq 0$, donc

$$E(Z_n) \leq \sqrt{E(Z_n^2)} = \sqrt{n}.$$

AUTRE MÉTHODE — On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz $|E(XY)| \leq \sqrt{E(X^2)}\sqrt{E(Y^2)}$ aux variables aléatoires $X = Z_n$ et $Y = 1$.

139. RMS 2024 172 ENS MP MPI

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes telles que $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ sont finis.

- (a) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. Comparer $E(f(X))$ et $f(E(X))$.
 (b) On dit que $X \leq_c Y$ si, pour toute fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ convexe, $E(f(X)) \leq E(f(Y))$.
 i. Donner un exemple de couple (X, Y) tel que $X \neq Y$ et $X \leq_c Y$.
 ii. Montrer que, si $X \leq_c Y$, alors $E(X) = E(Y)$ et $V(X) \leq V(Y)$.

140. UPS 20240116

Mots-clés : *inégalité de Cantelli*

Soit X une variable aléatoire discrète réelle possédant une espérance $\mu = E(X)$ et une variance $\sigma^2 = V(X)$. Montrer que, pour tout $a > 0$, $P(X - \mu \geq a) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}$. (On pourra utiliser l'événement $(X - \mu + t)^2 \geq (a + t)^2$, où $t \in \mathbb{R}_+$).

SOLUTION. — Soit $t \in \mathbb{R}_+$: l'événement $(X - \mu \geq a)$ est égal $(X - \mu + t \geq a + t)$ qui est inclus dans $(X - \mu + t)^2 \geq (a + t)^2$. Par croissance de la proba, $P(X - \mu \geq a) \leq P((X - \mu + t)^2 \geq (a + t)^2)$.

La v.a. $Y = (X - \mu + t)^2$ est positive, elle possède une espérance $E(Y) = \sigma^2 + t^2$ et le réel $(a + t)^2$ est strictement positif, d'où : $P((X - \mu + t)^2 \geq (a + t)^2) \leq \frac{E(Y)}{(a+t)^2}$ d'après l'inégalité de Markov. D'où $P(X - \mu \geq a) \leq \frac{\sigma^2 + t^2}{(a+t)^2}$ pour tout $t \geq 0$.

On dresse le tableau des variations de la fonction $\mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto \frac{\sigma^2 + t^2}{(a+t)^2}$: elle possède un minimum, atteint en $t_0 = \frac{\sigma^2}{a}$, et égal à $\frac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}$. L'inégalité précédente est vraie pour tout $t \geq 0$, donc en particulier pour t_0 .

Une seconde preuve : <https://les-mathematiques.net/vanilla/discussion/420931/inegalite-de-tchebychev-cantelli>

141. B3 X

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes, indépendantes, à valeurs dans \mathbb{N} . Soit $p \in]0, 1[$.

- (a) On suppose que $X \sim \mathcal{B}(n_1, p)$ et $Y \sim \mathcal{B}(n_2, p)$ où $n_1, n_2 \in \mathbb{N}^*$. Qu'en déduire sur la v.a. $X + Y$?
- (b) On suppose que $X + Y \sim \mathcal{B}(n, p)$ où $n \in \mathbb{N}^*$. Qu'en déduire sur les v.a. X et Y ?

- (a) (Voir \triangleright **les exercices X.33, XIV.5&15.**) Les fonctions génératrices des v.a. X et Y sont définies par $G_X(t) = (pt + q)^{n_1}$ et $G_Y(t) = (pt + q)^{n_2}$. Les v.a. X et Y sont indépendantes par hypothèse, d'où $G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t) = (pt + q)^{n_1+n_2}$, donc $X + Y \sim \mathcal{B}(n_1 + n_2, p)$.
- (b) Les v.a. X et Y sont à valeurs dans \mathbb{N} , donc à valeurs dans $\llbracket 0, n \rrbracket$ car $X + Y$ l'est. Les fonctions génératrices G_X et G_Y sont donc polynomiales. Par indépendance des v.a. X et Y , leur produit est $G_X G_Y = G_{X+Y} : t \mapsto (pt + q)^n$ car $X + Y \sim \mathcal{B}(n, p)$. Il existe donc $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tels que $n_1 + n_2 = n$ et $G_X(t) = \alpha(pt + q)^{n_1}$ et $G_Y(t) = \frac{1}{\alpha}(pt + q)^{n_2}$. De plus $\alpha = 1$ car $G_X(1) = G_Y(1) = 1$ comme toute fonction génératrice. Donc X et Y suivent des lois binomiales, à moins que $n_1 = 0$ (resp. $n_2 = 0$); dans ce cas, $(X = 0)$ (resp. $(Y = 0)$) est l'événement presque certain.

142. RMS 2025 824 Mines-Ponts MP MPI

Soient X et Y deux v.a. strictement positives, de même loi et d'espérance finie.

- (a) On suppose que X et Y sont indépendantes et que $\frac{1}{X}$ est d'espérance finie. Montrer que $\frac{X}{Y}$ est d'espérance finie et que $E\left(\frac{X}{Y}\right) \geq 1$.
- (b) On suppose que $\ln(X)$ et $\frac{X}{Y}$ sont d'espérance finie. Montrer que $E\left(\frac{X}{Y}\right) \geq 1$.

SOLUTION. —

- (a) Par hypothèse, $X \in L^1$ et $\frac{1}{Y}$ aussi car de même loi que $\frac{1}{X}$ qui appartient à L^1 par hypothèse. Les v.a. X et $\frac{1}{Y}$ sont indépendantes car X et Y le sont. D'où $\frac{X}{Y} \in L^1$ et $E\left(\frac{X}{Y}\right) = E(X)E\left(\frac{1}{Y}\right) = E(X)E\left(\frac{1}{X}\right)$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $E\left(\sqrt{X} \frac{1}{\sqrt{X}}\right)^2 \leq E(\sqrt{X}^2)E\left(\frac{1}{\sqrt{X}}^2\right)$. Donc $E\left(\frac{X}{Y}\right) \geq 1$.
- (b) $\ln X - \ln Y = \ln \frac{X}{Y} \leq \frac{X}{Y} - 1$ par concavité de la fonction \ln . Par hypothèse, $\ln X \in L^1$ et $\ln Y$ aussi car de même loi, d'où $E(\ln X - \ln Y) = E(\ln X) - E(\ln Y) = 0$. Or $\frac{X}{Y} - 1 \in L^1$ par hypothèse, d'où $E\left(\frac{X}{Y} - 1\right) \geq 0$ par croissance de l'espérance. Donc $E\left(\frac{X}{Y}\right) \geq 1$.

143. RMS 2026 1238 Centrale MP MPI

Mots-clés : loi de Poisson et transformée de Laplace

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

- (a) Montrer que $S_n \sim \mathcal{P}(n\lambda)$. et que, pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathbf{P}(|S_n - n\lambda| \geq n\varepsilon) \leq \frac{\lambda}{n\varepsilon^2}$.

- (b) Soit $x > 0$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\lfloor nx \rfloor} e^{-\lambda n} \frac{(n\lambda)^k}{k!} = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < x < \lambda, \\ 1 & \text{si } x > \lambda. \end{cases}$

- (c) Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue et nulle en dehors d'un segment. Montrer que la fonction

$$\mathcal{L}(f) : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt} dt \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ et que, pour tout } x \geq 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\lfloor nx \rfloor} (-1)^k \frac{n^k}{k!} \mathcal{L}(f)^{(k)}(n) = \int_0^x f.$$

SOLUTION. —

- (a) Soient X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{P}(\lambda)$ et $t \in [0, 1]$. On a

$$G_X(t) = \mathbf{E}(t^X) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(t\lambda)^k}{k!} = e^{\lambda(t-1)}$$

Soit $t \in [0, 1]$. On a $G_{S_n}(t) = \mathbf{E}(t^{S_n}) = \mathbf{E}(t^{X_1 + \dots + X_n}) = \mathbf{E}(t^{X_1} \dots t^{X_n})$. La famille $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ est indépendante donc, par le lemme des coalitions, $(t^{X_i})_{1 \leq i \leq n}$ l'est aussi. Par propriété de l'espérance du produit de variables aléatoires indépendantes,

$$G_{S_n}(t) = \mathbf{E}(t^{X_1}) \times \dots \times \mathbf{E}(t^{X_n}) = \left(e^{\lambda(t-1)}\right)^n = e^{n\lambda(t-1)}$$

Ainsi, $S_n \sim \mathcal{P}(n\lambda)$.

En appliquant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à S_n , on a, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbf{P}(|S_n - \mathbf{E}(S_n)| \geq n\varepsilon) = \mathbf{P}(|S_n - n\lambda| \geq n\varepsilon) \leq \frac{\mathbf{V}(S_n)}{(n\varepsilon)^2} \leq \frac{n\lambda}{n^2\varepsilon^2} \leq \frac{\lambda}{n\varepsilon^2}.$$

(b) La variable aléatoire S_n est à valeurs entières donc

$$\sum_{k=0}^{\lfloor nx \rfloor} e^{-\lambda n} \frac{(n\lambda)^k}{k!} = \mathbf{P}(S_n \leq nx)$$

Soit $x \in]0, \lambda[$. On a l'inclusion $(S_n \leq nx) \subset (|S_n - n\lambda| \geq n(\lambda - x))$, d'où l'inégalité

$$0 \leq \mathbf{P}(S_n \leq nx) \leq \mathbf{P}(|S_n - n\lambda| \geq n(\lambda - x)) \leq \frac{\lambda}{n(\lambda - x)^2}$$

On en déduit, par encadrement, que $\mathbf{P}(S_n \leq nx) \rightarrow 0$.

Soit $x \in]\lambda, +\infty[$. Alors $(S_n > nx) \subset (|S_n - n\lambda| > n(x - \lambda))$ donc

$$\mathbf{P}(S_n > nx) \leq \mathbf{P}(|S_n - n\lambda| > n(x - \lambda)) \leq \frac{\lambda}{n(x - \lambda)^2}$$

Par encadrement $\mathbf{P}(S_n > nx) \rightarrow 0$ et $\mathbf{P}(S_n \leq nx) = 1 - \mathbf{P}(S_n > nx) \rightarrow 1$.

(c) Montrons que $\mathcal{L}(f)$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}^+ . Soit $g : (x, t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \mapsto f(t)e^{-xt}$. Alors

(i) pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $x \mapsto g(x, t)$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}^+ ,

(ii) pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ et pour tout $j \in \mathbb{N}$, $t \mapsto \frac{\partial^j g}{\partial x^j} = (-1)^j t^j f(t)e^{-xt}$ est intégrable, puisque continue par morceaux et nulle en dehors d'un segment,

(iii) si $k \in \mathbb{N}^*$, alors

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall t \in \mathbb{R}^+, \quad \left| \frac{\partial^k g}{\partial x^k}(x, t) \right| \leq t^k |f(t)|$$

cette dernière fonction étant intégrable puisque nulle en dehors d'un segment.

La fonction $\mathcal{L}(f)$ est de classe \mathcal{C}^k pour $k \in \mathbb{N}$, donc de classe \mathcal{C}^∞ .

Soit $x \geq 0$, alors

$$\sum_{k=0}^{\lfloor nx \rfloor} (-1)^k \frac{n^k}{k!} \mathcal{L}(f)^{(k)}(n) = \int_0^{+\infty} f(t) \sum_{k=0}^{\lfloor nx \rfloor} \frac{(nt)^k}{k!} e^{-nt} dt$$

Posons $v_n : t \mapsto f(t) \sum_{k=0}^{\lfloor nx \rfloor} \frac{(nt)^k}{k!} e^{-nt}$. D'après la question **d**), la suite (v_n) converge simplement vers f sur l'intervalle $]0, \lambda[$, vers 0 sur l'intervalle $]\lambda, +\infty[$ et est dominée sur \mathbb{R}^+ par $t \mapsto |f(t)|$, qui est intégrable. D'après le théorème de convergence dominée

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{\lfloor nx \rfloor} (-1)^k \frac{n^k}{k!} \mathcal{L}(f)^{(k)}(n) = \int_0^x f(t) dt$$

144. RMS 2026 163 ENS MP MPI

On munit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique. Soit $X = (X_1 \dots X_n)^T$ un vecteur aléatoire tel que la v.a. $\|X\|^2$ est d'espérance finie.

(a) Justifier que la matrice de covariance $C(X) = (\text{Cov}(X_i, X_j))_{1 \leq i, j \leq n}$ est bien définie. À quelle condition cette matrice est-elle diagonale ?

(b) Soient le vecteur $v \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et la v.a. $Y = \langle v, X \rangle$. Montrer que $\mathbf{V}(Y) = v^T C(X) v$.

(c) Montrer que $C(X) \in S_n^+$ et que, réciproquement, toute matrice $A \in S_n^+$ est la matrice de covariance d'un vecteur aléatoire X . (On pourra exhiber une matrice M telle $A = MM^T$ et un vecteur aléatoire Z tel que $C(Z) = I_n$.)

SOLUTION. —

(a) Dans le cas où les X_i sont indépendantes, $\text{Cov}(X_i, X_j) = 0$ pour tout (i, j) avec $i \neq j$, et la matrice $C(X)$ est donc diagonale avec pour éléments diagonaux les $(\mathbf{V}(X_i))_{1 \leq i \leq n}$.

(b) Par bilinéarité de la covariance,

$$\mathbf{V}(Y) = \text{Cov} \left(\sum_{i=1}^n v_i X_i, \sum_{j=1}^n v_j X_j \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n v_i v_j \text{Cov}(X_i, X_j) = v^T C(X) v$$

(c) On souhaite démontrer qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice de covariance si et seulement si elle est symétrique positive.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = C(X)$ pour une certaine famille de variables aléatoires $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$. La matrice A est bien symétrique. En outre, pour tout $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, d'après la question **b**),

$$v^T A v = \mathbf{V}(\langle v, X \rangle) = \mathbf{V} \left(\sum_{i=1}^n v_i X_i \right) \geq 0.$$

On peut donc conclure que $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$

Réciproquement, soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. D'après le théorème spectral, on dispose de $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ tel que $A = P \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) P^T$, avec $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres positives de A . Ainsi, en posant $M = P \text{Diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$, $A = M M^T$.

On considère une famille $(Y_i)_{1 \leq i \leq n}$ de variables aléatoires indépendantes, centrées et réduites (par exemple des variables aléatoires de Rademacher indépendantes); on remarque alors que $C(Y) = I_n$. Ainsi, en posant $X = M Y$, on obtient pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, par bilinéarité de la covariance,

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X_i, X_j) &= \text{Cov} \left(\sum_{k=1}^n m_{i,k} Y_k, \sum_{l=1}^n m_{j,l} Y_l \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n m_{i,k} m_{j,l} \delta_{k,l} = \sum_{k=1}^n m_{i,k} m_{j,k} = a_{i,j} \end{aligned}$$

Ainsi $A = C(X)$.

Commentaires :

1. Laissez entrevoir à l'examinateur dès le début de l'oral ce que vous avez su faire ou non de tous les exercices, par des formules du type « J'ai résolu, sauf erreur, le deuxième exercice et les questions 1 et 3 du premier exercice. Dans la question 2, je n'ai pas encore conclu mais je pense à un équivalent ou, peut-être à une comparaison série-intégrale. » Cela permettra à l'examinateur de vous relancer sur une des pistes. Et vous évitera la frustration, pris par le temps, de devoir sortir de la salle en fin d'oral en donnant l'impression de ne pas avoir touché à une question que vous aviez pourtant abordée.
2. Pensez à donner la définition des termes techniques (le *sup* est le plus petit des majorants, etc) ou énoncer les théorèmes que vous allez utiliser (avec leurs hypothèses), éventuellement dès le début en présentant l'exercice.
3. À l'oral, au contraire de l'écrit, on annonce le résultat ou la conclusion **puis** on en fait le calcul ou la preuve. Parce que :
 - il est chronophage de prouver un résultat erroné ;
 - l'examinateur vous dispensera parfois de développer le calcul d'un résultat, s'il constate que vous avez obtenu le bon résultat. Rien ne vous interdit d'ailleurs, après lui avoir exposé le résultat, de lui demander : « Voulez-vous que je détaille le calcul (ou la preuve) ? »
4. Ne pas dire « On voit que » et ne surtout pas dire « On voit directement que » ni « clairement » ni « facilement » ni « immédiatement ».
5. On évitera de répéter « du coup » ou « de base ».
6. Si vous écrivez gros, ou en désordre, divisez votre tableau dès le début de l'oral. N'oubliez pas d'appuyer sur la craie.
7. Une indication de l'examinateur n'est pas un piège, ne pas en tenir compte est une bêtise et les bêtises font perdre des points.
8. On ne se précipite pas pour répondre à une question de l'examinateur : « Il faut tourner sept fois sa langue dans sa bouche avant de parler. »

9. Faire un dessin :
- s'il est question de projection orthogonale ou de Pythagore ;
 - si vous voulez décrire une rotation autour d'un axe (cela vaut mieux que de faire des gestes) ;
 - si vous voulez décrire les propriétés d'une fonction comme « $\forall x \in \mathbb{R}, |\text{Arctan}(x)| \leq \pi/2$ », « $\forall x \geq 0, \sin(x) \leq x$ », « $\forall x > -1, \ln(1+x) \leq x$ » ou « $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1+x$ » ;
 - si vous comparez série et intégrale ;
 - si vous voulez discuter la convergence d'une série entière en indiquant R et $-R$.
10. Ne pas dire « L'intégrale converge **quand** $x > 0$ » mais dire « **si** » ou « **si, et seulement si** ».
11. « Il faut que » ne signifie pas « il faut et il suffit que ».
12. $x < 0$ se dit « x est strictement inférieur à 0 » ou « x est strictement négatif » mais pas « x est inférieur à 0 » ni « x est négatif »
13. Ne pas dire « Chacun de ces événements est indépendant » mais « Ces événements sont indépendants » ou (ce n'est pas la même chose) « indépendants deux à deux ».
14. Ne pas dire : « ça converge » (l'intégrale, la suite, la série ?). Ne pas dire « La suite de fonctions converge » car une suite de fonctions converge simplement, voire uniformément. Ne pas dire « La série de fonctions converge » car une série de fonctions converge simplement voire uniformément voire normalement.
15. « L'union $\cup_{n \in \mathbb{N}} F_n$ est disjointe » ne signifie pas « $\forall n \in \mathbb{N}, F_n \cap F_{n+1} = \emptyset$ » mais signifie « $\forall i \neq j, F_i \cap F_j = \emptyset$ », autrement dit « les événements sont disjoints deux à deux » et non pas « chaque événement est disjoint de son successeur ».
16. « Soit i est une valeur propre, soit $-i$ l'est » est une manière (maladroite) de dire que « Ou bien i est une valeur propre, ou bien $-i$ l'est ». À ne pas confondre avec « i est une valeur propre ou $-i$ l'est ».
17. On compare les fonctions (positives) et non les intégrales pour conclure sur la convergence voire sur la comparaison des intégrales. Idem pour les suites et les séries.
18. En proba : d'abord les événements (est-ce une intersection ? d'événements indépendants ? ou une union ? disjointe ?), ensuite leur proba.
19. Les « éléments propres » d'une matrice = ses valeurs propres et ses sous-espaces propres.