

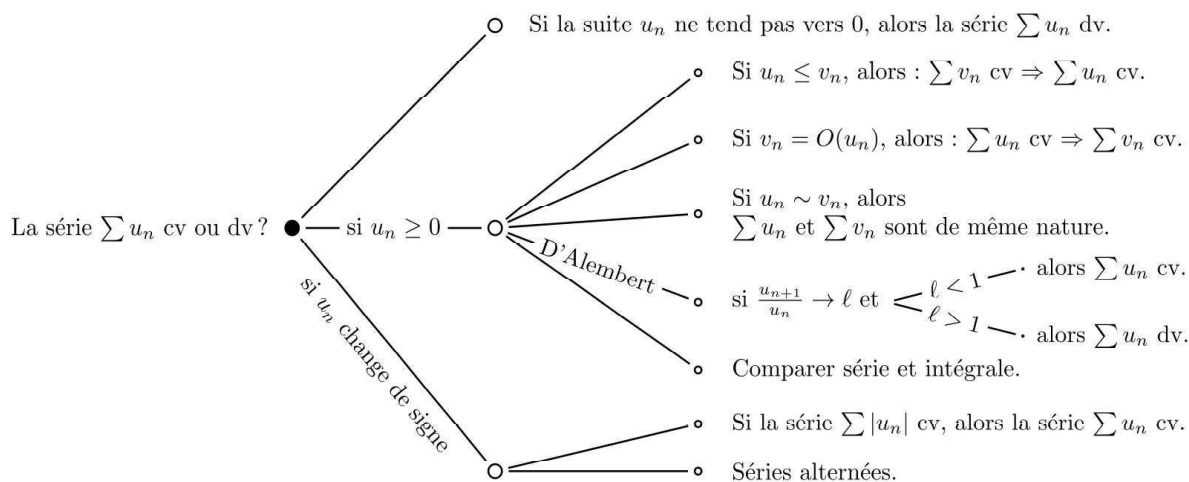
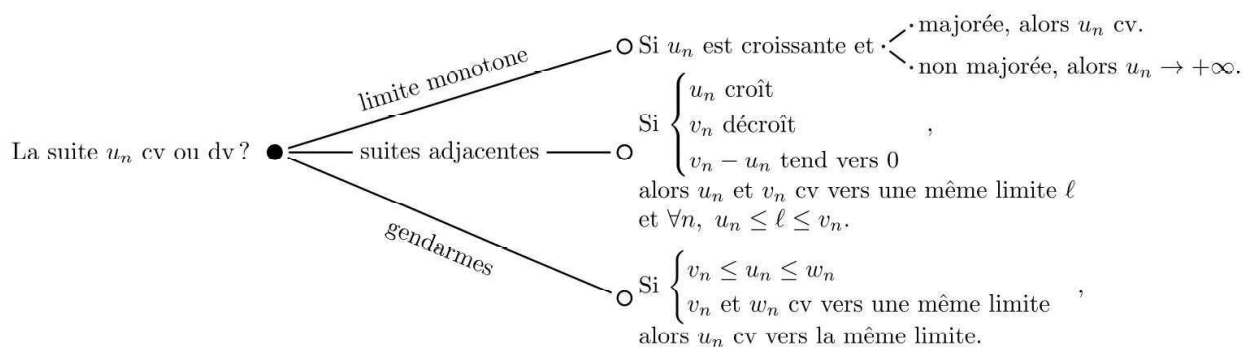
Chapitre I Séries numériques

Table des matières

I.1	La nature d'une suite ou d'une série	1
I.2	Comparer série et intégrale	2
I.3	Les séries alternées	3
I.4	Le critère de d'Alembert	4
I.5	Sommer les $\sim$, o , O	5
I.6	Développements asymptotiques	6

I.1 LA NATURE D'UNE SUITE OU D'UNE SÉRIE

MÉTHODE 1 — Comment montrer qu'une suite ou une série converge ou diverge.



Soit $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ la suite des sommes partielles d'une série $\sum u_n$. **Si cette série converge**, alors, pour chaque $n \in \mathbb{N}$:

- la somme partielle S_n est une valeur approchée de la somme exacte $\ell = \sum_{k=0}^{\infty} u_k$;
- le reste $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$ est bien défini et $\forall n \in \mathbb{N}, S_n + R_n = \ell$.

Et $|R_n| = |\ell - S_n|$ est l'erreur. Cette erreur tend vers zéro car $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \ell - \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \ell - \ell = 0$.

I.2 COMPARER SÉRIE ET INTÉGRALE

MÉTHODE 2 — Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux et décroissante. Soit la suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définie pour chaque $k \in \mathbb{N}$ par : $u_k = f(k)$. Pour chaque $k \in \mathbb{N}$,

$$u_{k+1} \leq \int_k^{k+1} f(t) dt \leq u_k.$$

Preuve — Pour tout $t \in [k, k+1]$, $f(k+1) \leq f(t) \leq f(k)$. D'où (croissance de l'intégrale) :

$$u_{k+1} \leq \int_k^{k+1} f(k+1) dt \leq \int_k^{k+1} f(t) dt \leq \int_k^{k+1} f(k) dt = u_k.$$

□

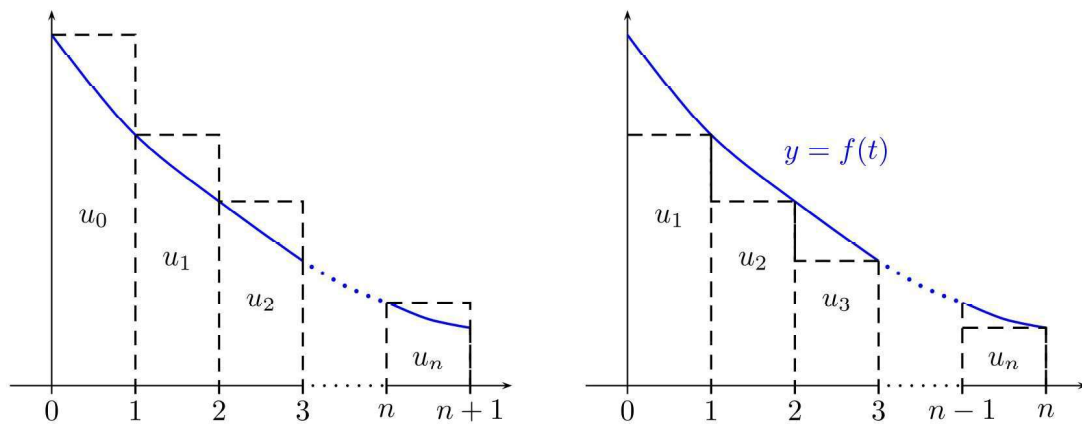


FIGURE I.1 – COMPARER UNE SÉRIE ET UNE INTÉGRALE

EXERCICE 3 (La série harmonique) — Soit $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

Montrer que la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge. Préciser ce résultat en démontrant que :

$$H_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \ln n \quad \text{et} \quad H_n - \ln n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \gamma$$

où γ est un réel appelé la **constante d'Euler**. Autrement dit : $H_n = \ln n + o(\ln n) = \ln n + \gamma + o(1)$.

EXERCICE 4 — Montrer que : $\ln(n!) \sim n \ln(n)$.

PROPOSITION 5 (Critère de Riemann)

Soit un réel α : la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.

Preuve — On compare série et intégrale :

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{t^\alpha} dt \leq \underbrace{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}}_{S_n} \leq 1 + \int_1^n \frac{1}{t^\alpha} dt.$$

— Si $\alpha = 1$, alors (comme dans l'exercice 3) $\ln(n+1) \leq S_n \leq 1 + \ln(n)$,

d'où $\ln(n+1) \leq S_n$, or $\ln(n+1) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$, donc S_n diverge.

— Si $\alpha \neq 1$, alors

$$\underbrace{\frac{1 - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}}{\alpha - 1}}_{A_n} \leq S_n \leq 1 + \underbrace{\frac{1 - \frac{1}{n^{\alpha-1}}}{\alpha - 1}}_{B_n}.$$

— Si $\alpha < 1$, alors $A_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$, donc S_n diverge.

— Si $\alpha > 1$, alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $B_n \leq 1 + \frac{1}{\alpha - 1}$, d'où la suite S_n est majorée,

or S_n est croissante (car $\frac{1}{n^\alpha}$ est positif), donc S_n converge.

□

EXERCICE 6 — Les séries suivantes sont-elles convergentes ou divergentes ?

1. $\sum \frac{1}{n^2 + \sqrt{n}}$

3. $\sum \frac{1}{n \cos^2(n)}$

5. $\sum \frac{\sin n}{n^2}$

2. $\sum \frac{1}{n^2 - \sqrt{n}}$

4. $\sum \frac{\ln n}{n^2}$

EXERCICE 7 — Soit, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, le reste $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ de la série convergente $\sum \frac{1}{n^2}$. En comparant série et intégrale, déterminer un équivalent de R_n .

I.3 LES SÉRIES ALTERNÉES

THÉORÈME 8 (Théorème des séries alternées)

Si une suite (u_n) tend vers zéro en décroissant à partir d'un certain rang n_0 , alors :

1. la série $\sum (-1)^n u_n$ est convergente ;

2. la somme $\ell = \sum_{k=n_0}^{\infty} (-1)^k u_k$ a le même signe que son premier terme $(-1)^{n_0} u_{n_0}$ et est encadrée par

deux sommes partielles consécutives $S_n = \sum_{k=n_0}^n (-1)^k u_k$ et S_{n+1} pour chaque $n \geq n_0$;

3. pour chaque $n \geq n_0$, le reste $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k u_k$ a le même signe que le premier terme négligé $(-1)^{n+1} u_{n+1}$ et $|R_n| \leq u_{n+1}$.

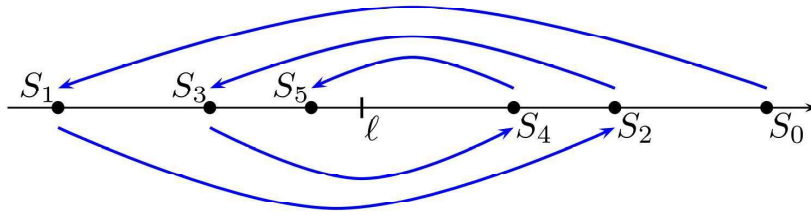


FIGURE I.2 – LA CONVERGENCE D'UNE SÉRIE ALTERNÉE

EXERCICE 9 — On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}$. Montrer que $\ln 2 - S_n = \int_0^1 \frac{(-t)^n}{1+t} dt$. En déduire que la suite S_n converge et que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2$$

Justifier l'existence de $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ et déterminer la nature de la série $\sum R_n$.

I.4 LE CRITÈRE DE D'ALEMBERT

THÉORÈME 10 (Critère de d'Alembert)

Soit (u_n) une suite strictement positive telle que

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell.$$

1. Si $\ell < 1$, alors la série $\sum u_n$ converge.
2. Si $\ell > 1$, alors la série $\sum u_n$ diverge (grossièrement).

Preuve — On va comparer la série $\sum u_n$ à une série géométrique $\sum \lambda^n$:

1. Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ell < 1$, alors il existe un réel $\lambda < 1$ tel que : $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \lambda$ à partir d'un certain rang N .

D'où, pour tout $n > N$:

$$\begin{aligned} u_n &= u_N \times \underbrace{\frac{u_{N+1}}{u_N} \times \cdots \times \frac{u_n}{u_{n-1}}}_{\leq \lambda^{n-N}} \\ &\leq u_N \lambda^{-N} \cdot \lambda^n. \end{aligned}$$

Or la série $\sum \lambda^n$ converge car $\lambda < 1$. D'où la série $u_N \lambda^{-N} \sum \lambda^n$ converge, donc la série $\sum u_n$ converge aussi.

2. De même, si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ell > 1$, alors il existe un réel $\lambda > 1$ tel que : $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq \lambda$ à partir d'un certain rang N .

D'où, pour tout $n \geq N$, $u_n \geq u_N \lambda^{-N} \cdot \lambda^n$ qui ne tend pas vers 0 car $\lambda > 1$. Donc la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.

□

REMARQUE 11 — Si $\ell = 1$, alors le critère ne permet pas de conclure (en effet $\sum \frac{1}{n}$ diverge tandis que $\sum \frac{1}{n^2}$ converge).

EXERCICE 12 — Pour quelles valeurs du réel x les séries

$$\sum \frac{x^n}{n!} \quad \text{et} \quad \sum \frac{x^n}{n}$$

convergent-elles ? Nous verrons au chapitre « Séries entières » que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ (et même $x \in \mathbb{C}$),

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = e^x$$

I.5 SOMMER LES $\sim$, o , O

LEMME 13

Soient (u_n) et (v_n) deux suites. On suppose que la suite (v_n) est positive.

1. Si $\sum v_n$ converge et $u_n = O(v_n)$, alors $\sum u_n$ converge absolument et $\sum_{p=n+1}^{+\infty} u_p = O\left(\sum_{p=n+1}^{+\infty} v_p\right)$.
2. Si $\sum v_n$ diverge et $u_n = O(v_n)$, alors $\sum_{p=0}^n u_p = O\left(\sum_{p=0}^n v_p\right)$.
3. De même en remplaçant O par o ou par $\sim$.

Preuve —

1. Si $u_n = O(v_n)$ alors il existe un rang n_0 et une constante K tels que $\forall n \geq n_0, |u_n| \leq K|v_n|$. De plus, la suite (v_n) est positive, d'où $|u_n| \leq Kv_n$. Or la série $\sum v_n$ converge, d'où $\sum |u_n|$ converge aussi, donc la série $\sum u_n$ converge absolument. Les restes

$$\widehat{U}_n = \sum_{p=n+1}^{+\infty} u_p \quad \text{et} \quad \widehat{V}_n = \sum_{p=n+1}^{+\infty} v_p$$

sont donc définis. De $|u_n| \leq Kv_n$, on déduit que $|\widehat{U}_n| \leq \sum_{p=n+1}^{+\infty} |u_p| \leq K\widehat{V}_n$ à partir du rang n_0 , donc $\widehat{U}_n = O(\widehat{V}_n)$.

2. On utilise le même n_0 et on note les sommes partielles $U_n = \sum_{p=0}^n u_p$ et $V_n = \sum_{p=0}^n v_p$. La suite V_n tend vers $+\infty$, d'où il existe un rang $n_1 \geq n_0$ tel que $\forall n \geq n_1, |U_{n_0}| \leq KV_{n_0}$.

D'où $\forall n \geq n_1, |U_n| = |U_{n_0} + (U_n - U_{n_0})| \leq |U_{n_0}| + |U_n - U_{n_0}| \leq |U_{n_0}| + K(V_n - V_{n_0}) \leq 2KV_{n_0}$. Donc $U_n = O(V_n)$.

3. Si $u_n = o(v_n)$, alors on remplace la constante K ci-dessus par ε , pour tout $\varepsilon > 0$.

On remarque que $u_n \sim v_n \iff u_n - v_n = o(v_n)$ et on utilise la propriété déjà démontrée pour les o .

□

Le théorème suivant est juste un cas particulier du lemme précédent :

THÉORÈME 14

Soient (u_n) et (v_n) deux suites positives et équivalentes :

- ou bien leurs séries **divergent** et leurs **sommes partielles** sont équivalentes ;
- ou bien leurs séries **convergent** et leurs **restes** sont équivalents.

EXERCICE 15 —

1. Montrer, en appliquant le théorème aux deux suites $u_n = \frac{1}{n^2}$ et $v_n = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$, que la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge et que son reste est équivalent à $\frac{1}{n}$. (On avait déjà obtenu ces résultats à l'exercice 7 en comparant série et intégrale.)

2. Montrer, en appliquant le théorème aux deux suites $u_n = \frac{1}{n}$ et $v_n = \ln(n) - \ln(n-1)$, que la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge et que ses sommes partielles sont équivalentes à $\ln(n)$. (On a déjà obtenu ces résultats à l'exercice 3 en comparant série et intégrale.)

COROLLAIRE 16 (Lemme de Cesàro)

Si une suite (u_n) converge vers un réel ℓ , alors elle converge en moyenne vers ℓ :

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ell \implies \frac{u_1 + \cdots + u_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ell.$$

Preuve — Dans le cas particulier où $\ell = 0$: $u_n = o_{n \rightarrow \infty}(1)$, or 1 est positif et la série $\sum 1$ diverge, d'où la somme partielle $u_1 + \cdots + u_n = S_n$ est un o de la somme partielle $1 + 1 + \cdots + 1 = n$ d'après le lemme 13. Donc la moyenne $\frac{S_n}{n}$ tend vers 0 qui est égal à ℓ .

Le cas général se ramène au cas particulier, appliqué à la suite $u_n - \ell$.

Une seconde preuve : soit $\varepsilon > 0$. Dans le cas particulier où $\ell = 0$, $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$, il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n > N, |u_n| \leq \varepsilon$. Soit $n > N$: $\frac{|S_n|}{n} = \left| \frac{u_1 + \cdots + u_n}{n} \right| \leq \frac{|u_1| + \cdots + |u_n|}{n} \leq \frac{|u_1| + \cdots + |u_N|}{n} + \frac{|u_{N+1}| + \cdots + |u_n|}{n}$ d'après l'inégalité triangulaire. D'une part $\frac{|u_{N+1}| + \cdots + |u_n|}{n} \leq \frac{n-N}{n} \varepsilon \leq \varepsilon$ car $n > N$. D'autre part $\frac{|u_1| + \cdots + |u_N|}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$, il existe donc $N' \geq N$ tel que $\forall n > N', \frac{|u_1| + \cdots + |u_N|}{n} \leq \varepsilon$.

Donc $\forall \varepsilon > 0, \exists N' \in \mathbb{N}, \forall n > N', \frac{|S_n|}{n} \leq 2\varepsilon$, ce qui prouve que la moyenne tend vers $\ell = 0$. $\square$

EXERCICE 17 — La réciproque du lemme de Cesàro est-elle vraie ? Montrer que le lemme de Cesàro reste vrai si ℓ vaut $+\infty$ ou $-\infty$.

MÉTHODE 18 (Séries télescopiques) — À une suite (u_n) , on associe sa série télescopique $\sum (u_n - u_{n-1})$:

- la somme partielle $\sum_{k=1}^n (u_k - u_{k-1})$ de la série télescopique est égale à $u_n - u_0$ (et, par conséquent, la suite et sa série télescopique ont toujours la même nature) ;
- si u_n tend vers un réel ℓ , alors le reste $\sum_{k=n+1}^{\infty} (u_k - u_{k-1})$ de la série télescopique est égal à $\ell - u_n$.

Preuve — Soit $n \geq 1$: $S_n = \sum_{p=1}^n (u_p - u_{p-1}) = u_n - u_0$ (téléscope) et

$$R_n = \sum_{p=n+1}^{\infty} (u_p - u_{p-1}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{p=n+1}^N (u_p - u_{p-1}) = \lim_{N \rightarrow \infty} (u_N - u_n) = \ell - u_n. \quad \square$$

EXERCICE 19 (Lemme de l'escalier) — Montrer que : $u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \alpha \neq 0 \implies u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} n\alpha$.

En déduire que : si (u_n) est une suite de réels strictement positifs telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ell > 0$, alors $\sqrt[n]{u_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ell$.

I.6 DÉVELOPPEMENTS ASYMPTOTIQUES

Nous savons que la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ est divergente et nous connaissons (exercice 3) un équivalent de ses sommes partielles :

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \sim \ln n.$$

Nous allons préciser ce résultat en démontrant les formules suivantes :

$$H_n = \ln n + o(\ln n) \quad (1)$$

$$= \ln n + \gamma + o(1) \quad (2)$$

$$= \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \quad (3)$$

$$= \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad (4)$$

où γ est un réel appelé la constante d'Euler.

Ces formules sont des exemples de **développements asymptotiques**, chaque développement étant plus poussé, donc plus précis, que le précédent. Pour obtenir ces développements, on utilise le théorème 14 et la méthode 18 :

- (1) La première formule est juste une réécriture de $\sim$ avec un o :

$$H_n \sim \ln n \iff H_n = \ln n + o(\ln n).$$

- (2) Nous avons déjà montré (exercice 3) que la suite $H_n - \ln n$ converge. Voici une autre preuve, utilisant la série télescopique : la suite $u_n = H_n - \ln n$ a la même nature que la série $\sum(u_n - u_{n-1})$. Or

$$\begin{aligned} u_n - u_{n-1} &= [H_n - \ln n] - [H_{n-1} - \ln(n-1)] = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n} + \left[-\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] = -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim -\frac{1}{2n^2}. \end{aligned}$$

La série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, d'où la série $\sum(u_n - u_{n-1})$ converge aussi, donc la suite u_n converge. Soit γ sa limite :

$$H_n - \ln(n) \longrightarrow \gamma \iff H_n = \ln n + \gamma + o(1).$$

- (3) Soit $u_n = H_n - \ln n - \gamma$. La série $\sum(u_n - u_{n-1})$ converge car $u_n - u_{n-1} \sim -\frac{1}{2n^2}$, on en déduit l'équivalence des restes :

$$R_n \sim -\frac{1}{2} \cdot \sum_{p=n+1}^{\infty} \frac{1}{p^2} \sim -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n} \quad (\text{par comparaison série-intégrale}), \text{ d'où } u_n \sim \frac{1}{2n} :$$

$$H_n - \ln n - \gamma \sim \frac{1}{2n} \iff H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

- (4) On cherche un équivalent de $u_n = H_n - \ln n - \gamma - \frac{1}{2n}$. La série $\sum(u_n - u_{n-1})$ est convergente car :

$$\begin{aligned} u_n - u_{n-1} &= \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \quad (\text{calculer le D.L.}) \\ &\sim \frac{1}{6n^3}, \quad \text{d'où (par équivalence des restes)} \\ R_n &\sim \frac{1}{6} \cdot \sum_{p=n+1}^{\infty} \frac{1}{p^3} \\ &\sim \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2n^2} \quad (\text{comparer série et intégrale}). \end{aligned}$$

$$\text{D'où } u_n \sim -\frac{1}{12n^2}, \quad \text{donc } H_n - \ln n - \gamma - \frac{1}{2n} \sim -\frac{1}{12n^2}.$$

PROPOSITION 20 (**Formule de Stirling**)

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

Preuve — On part de l'équivalent $\ln(n!) \sim n \ln n$ prouvé à l'exercice 4 puis on pousse le développement asymptotique : $\ln(n!) = n \ln n - n + \frac{1}{2} \ln n + K + \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$. Pour déterminer la constante K , on utilise les intégrales de Wallis. $\square$

EXERCICE 21 — *On lance $2n$ fois une pièce. Quelle est la probabilité u_n d'obtenir autant de Pile que de Face ? Déterminer un équivalent de u_n quand n tend vers l'infini.*