

FEUILLE DE T.D. N° 1

Suites & séries numériques

Exercice 1. Les séries suivantes sont-elles convergentes ou divergentes?

- | | |
|--|--|
| 1. $\sum \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ | 6. $\sum \frac{1}{\ln(n!)}$ |
| 2. $\sum \frac{1}{n \cdot n^{1/n}}$ | 7. $\sum e^{-\sqrt{\ln n}}$ |
| 3. $\sum \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ | 8. $\sum \frac{n}{(\ln n)^n}$ |
| 4. $\sum \frac{n^{100}}{e^n}$ | 9. $\sum \left(\frac{1}{n} - 1\right)^n$ |
| 5. $\sum \frac{1}{n \ln(n)}$ | 10. $\sum \left(n \sin \frac{1}{n}\right)^n$ |
| | 11. $\sum \sin(\pi \sqrt{n^2 + 1})$ |

Exercice 2. Pour quelles valeurs du réel a la série $\sum \frac{a^n}{n + a^{2n}}$ est-elle convergente?

Exercice 3. Soient, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{n(n+1)(2n+1)}$ et $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$. Montrer que :

- la série $\sum u_n$ converge et que $\sum_{k=1}^n u_k = 3 + 4H_n - 4H_{2n+1} + \frac{1}{n+1}$;
- la suite des réels $H_n - \ln n$ converge (on notera γ sa limite) et en déduire que $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = 3 - 4\ln(2)$.

Exercice 4. 1. Calculer $\int_0^1 t^{2k} dt$ et $\sum_{k=0}^n (-1)^k t^{2k}$.

2. Montrer que la série $\sum \frac{(-1)^k}{2k+1}$ converge et montrer que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}.$$

3. De même, après avoir décomposé en éléments simples la fraction rationnelle $\frac{1}{(4X+1)(4X+3)}$, montrer que la série $\sum \frac{1}{(4n+1)(4n+3)}$ converge et que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(4n+1)(4n+3)} = \frac{\pi}{8}.$$

Exercice 5. Soit un réel $x \in]0, \pi[$. On pose, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f_n(x) = \cos^{n-1}(x) \cdot \cos[(n+1)x].$$

Montrer que la série $\sum f_n(x)$ converge absolument et que $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = -1$.

Exercice 6. Pour quelles valeurs du réel $a \neq 0$ la série $\sum \frac{(-1)^n}{n^a + (-1)^n}$ est-elle convergente?

Exercice 7. 1. Soit un réel $\alpha > 1$. Justifier que $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ est bien défini pour chaque $n \in \mathbb{N}$ et déterminer un équivalent de R_n quand n tend vers ∞ .

2. On suppose que $\alpha > 2$. Montrer que la série $\sum R_n$ converge et que $\sum_{n=0}^{\infty} R_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha-1}}$. ▷ Familles sommables

Exercice 8 (La fonction zêta de Riemann). Soit $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$.

1. Montrer que l'ensemble de définition de la fonction ζ est l'intervalle $I =]1, +\infty[$.
2. Montrer que la fonction ζ est décroissante sur l'intervalle I .
3. Montrer que, pour tout $x > 1$, $1 + \frac{1}{(x-1)2^{x-1}} \leq \zeta(x) \leq 1 + \frac{1}{x-1}$.
4. Étudier $\lim_{x \rightarrow +\infty} \zeta(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} \zeta(x)$. Proposer un équivalent de $\zeta(x)$ quand x tend vers 1^+ .
5. Soit $x > 1$. Montrer que la série $\sum \frac{d_n}{n^x}$ converge et que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{n^x} = \zeta(x)^2$, où d_n est le nombre de diviseurs positifs de l'entier n . [▷ Familles sommables](#)

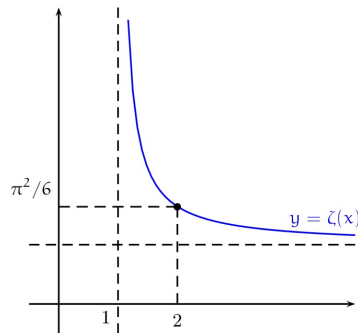


FIGURE 1 – LA FONCTION ζ DE RIEMANN.

Exercice 9 (Série télescopique & théorème de sommation des équivalents). Soit la suite définie par $u_0 \in]0, 1]$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sin u_n$.

1. Montrer que la suite (u_n) est convergente et que sa limite est nulle.
2. Étudier la limite de $\frac{u_{n+1} - u_n}{u_n^3}$. En déduire la nature de la série de terme général u_n^3 .
3. En étudiant $\ln(\frac{u_{n+1}}{u_n})$, montrer que la série de terme général u_n^2 diverge.
4. À l'aide d'un D.L., déterminer un réel α tel que $u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha$ converge vers une limite non nulle. En déduire un équivalent de u_n .

Exercice 10. Soit, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n \frac{pq}{p+q}$.

1. La suite des réels S_n est-elle convergente?
2. Montrer que $u_n = \sum_{p=1}^n \frac{p}{p+n}$ est équivalent à $n(1 - \ln 2)$. [▷ Réviser les sommes de Riemann](#)
3. En déduire un équivalent de $S_n - S_{n-1}$ puis de S_n .

Exercice 11 (Semi-convergence). Soit une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que la série $\sum u_n$ converge mais la série $\sum |u_n|$ diverge. Soient P_n et M_n les suites définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P_n = \max(0, u_n) \quad \text{et} \quad M_n = \min(0, u_n).$$

Montrer que les séries $\sum P_n$ et $\sum M_n$ divergent.

Exercice 12. 1. Montrer que la famille $\left(\frac{1}{(p+q)!}\right)_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable et que

$$\sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} \frac{1}{(p+q)!} = 2e.$$

2. Montrer que la famille $\left(\frac{1}{p^2+q^2}\right)_{(p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*}$ n'est pas sommable.

Exercice 13. Soit $x \in]-1, +1[$. En remarquant que tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ s'écrit de manière unique $(2q+1)2^p$, montrer que la série $\sum \frac{x^{2^p}}{1-x^{2^{p+1}}}$ converge et que

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{x^{2^p}}{1-x^{2^{p+1}}} = \frac{x}{1-x}.$$

Et aussi : le DS MPI/* 2025-2026 n° 1 & l'exo 2 du test MP2I juin 2026, en ligne avec leur corrigé.