

CORRIGÉ DU T.D. N° 1

Suites & séries numériques

31 août 2026

Exercice 1. Les séries suivantes sont-elles convergentes ou divergentes?

- | | |
|--|--|
| 1. $\sum \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ | 6. $\sum \frac{1}{\ln(n!)}$ |
| 2. $\sum \frac{1}{n \cdot n^{1/n}}$ | 7. $\sum e^{-\sqrt{\ln n}}$ |
| 3. $\sum \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ | 8. $\sum \frac{n}{(\ln n)^n}$ |
| 4. $\sum \frac{n^{100}}{e^n}$ | 9. $\sum \left(\frac{1}{n} - 1\right)^n$ |
| 5. $\sum \frac{1}{n \ln(n)}$ | 10. $\sum \left(n \sin \frac{1}{n}\right)^n$ |
| | 11. $\sum \sin(\pi \sqrt{n^2 + 1})$ |

Exercice 2. Pour quelles valeurs du réel a la série $\sum \frac{a^n}{n + a^{2n}}$ est-elle convergente?Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{a^n}{n + a^{2n}}$. On disjoint les cas :

- si $|a| > 1$, alors $|u_n| \sim \frac{|a|^n}{a^{2n}} \sim \left(\frac{1}{|a|}\right)^n$. Or la série géométrique $\sum \left(\frac{1}{|a|}\right)^n$ converge, donc la série $\sum u_n$ converge absolument.
- si $|a| < 1$, alors $|u_n| \sim \frac{|a|^n}{n} \leq |a|^n$. Or la série géométrique $\sum |a|^n$ converge, donc la série $\sum u_n$ converge absolument.
- si $a = 1$, alors $u_n = \frac{1}{n+1}$ et la série harmonique $\sum \frac{1}{n+1}$ diverge.
- si $a = -1$, alors $u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$ et la série harmonique alternée $\sum \frac{(-1)^n}{n+1}$ converge.

Exercice 3. Soient, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{n(n+1)(2n+1)}$ et $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$. Montrer que :

- la série $\sum u_n$ converge et que $\sum_{k=1}^n u_k = 3 + 4H_n - 4H_{2n+1} + \frac{1}{n+1}$;
- la suite des réels $H_n - \ln n$ converge (on notera γ sa limite) et en déduire que $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = 3 - 4\ln(2)$.

- $u_n = \frac{1}{n(n+1)(2n+1)} \sim \frac{1}{2n^3}$ qui ne change pas de signe. Or la série $\sum \frac{1}{n^3}$ converge, donc la série $\sum u_n$ aussi. On décompose en éléments simples la fraction rationnelle : $\frac{6}{X(X+1)(2X+1)} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X+1} + \frac{c}{2X+1}$, avec $a = 6$, $b = 6$ et $c = -24$. D'où

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n u_k &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} - 4 \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k+1} \\
 &= H_n + \left(H_n - 1 + \frac{1}{n+1}\right) - 4 \left(H_{2n+1} - 1 - \frac{1}{2}H_n\right) \\
 &= 3 + 4H_n - 4H_{2n+1} + \frac{1}{n+1}.
 \end{aligned}$$

2. **exercice 3 du chapitre I.** Comme dans l'exercice du cours, montrer que la suite $(H_n - \ln n)$ est décroissante et qu'elle est minorée. On en déduit qu'elle est convergente.

$H_n = \ln(n) + \gamma + \varepsilon_n$, où γ est la constante d'Euler et $\varepsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. D'où

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n u_k &= 3 + 4 [\ln(n) + \gamma + \varepsilon_n] - 4 [\ln(2n+1) + \gamma + \varepsilon_{2n+1}] + \frac{1}{n+1} \\ &= 3 - 4 \ln \frac{2n+1}{n} + 4(\varepsilon_n - \varepsilon_{2n+1}) + \frac{1}{n+1} \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 3 - 4 \ln(2) \end{aligned}$$

Exercice 4 (Séries géométriques). 1. Calculer $\int_0^1 t^{2k} dt$ et $\sum_{k=0}^n (-1)^k t^{2k}$.

2. Montrer que la série $\sum \frac{(-1)^k}{2k+1}$ converge et que $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$.

3. De même, après avoir décomposé en éléments simples la fraction rationnelle $\frac{1}{(4X+1)(4X+3)}$, montrer que la série $\sum \frac{1}{(4n+1)(4n+3)}$ converge et que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(4n+1)(4n+3)} = \frac{\pi}{8}$.

1. $\int_0^1 t^{2k} dt = \left[\frac{t^{2k+1}}{2k+1} \right]_0^1 = \frac{1}{2k+1}$ et, en reconnaissant une somme géométrique :

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k t^{2k} = \sum_{k=0}^n (-t^2)^k = \frac{1 - (-t^2)^{n+1}}{1 - (-t^2)} = \frac{1 + (-1)^{n+1} t^{2n+2}}{1 + t^2}.$$

2. On peut affirmer, grâce au théorème des séries alternées, que la série $\sum \frac{(-1)^k}{2k+1}$ converge car la suite $\frac{1}{2k+1}$ tend vers zéro en décroissant.

(Mais cela ne donne pas la valeur de la limite.) Autre méthode, on calcule la somme partielle $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1}$ grâce à la question

précédente : $S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \int_0^1 t^{2k} dt = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^n (-1)^k t^{2k} \right) dt$ par linéarité de l'intégrale. D'où

$$S_n = \int_0^1 \frac{1 + (-1)^{n+1} t^{2n+2}}{1 + t^2} dt = \int_0^1 \frac{1}{1 + t^2} dt + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1 + t^2} dt.$$

Puis on montre que la dernière intégrale tend vers 0 quand n tend vers ∞ :

$$\forall t \in [0, 1], 0 \leq \frac{t^{2n+2}}{1 + t^2} \leq t^{2n+2}, \text{ d'où } 0 \leq \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1 + t^2} dt \leq \frac{1}{2n+3} \text{ par croissance de l'intégrale.}$$

D'après le théorème des gendarmes, quand n tend vers l'infini, la suite des réels $\int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1 + t^2} dt$ tend vers zéro et aussi le produit

$(-1)^n \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1 + t^2} dt$ car la suite des réels $(-1)^n$ est bornée.

D'où la suite des réels $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1}$ tend vers $\int_0^1 \frac{1}{1 + t^2} dt = [\arctan t]_0^1 = \frac{\pi}{4}$.

Donc la série $\sum \frac{(-1)^k}{2k+1}$ converge et sa somme vaut $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$.

3. $\frac{1}{(4n+1)(4n+3)} \sim \frac{1}{16n^2}$ d'où (par comparaison de séries à termes positifs) la série $\sum \frac{1}{(4n+1)(4n+3)}$ converge.

4. On commence par décomposer la fraction rationnelle. On cherche α et β tels que :

$$\frac{1}{(4X+1)(4X+3)} = \frac{\alpha}{4X+1} + \frac{\beta}{4X+3}.$$

En multipliant l'égalité par $4x+1$ et en prenant $x = -\frac{1}{4}$, on trouve $\alpha = \frac{1}{2}$. De même, en multipliant l'égalité par $4x+3$ et en prenant $x = -\frac{3}{4}$, on trouve $\beta = -\frac{1}{2}$.

Pour calculer la somme de la série, on étudie la limite des sommes partielles :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^n \frac{1}{(4k+1)(4k+3)} &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{4k+1} - \frac{1}{4k+3} \right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \int_0^1 (x^{4k} - x^{4k+2}) dx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 (1-x^2) \sum_{k=0}^n (x^4)^k dx.
\end{aligned}$$

Or $(1-x^2) \sum_{k=0}^n (x^4)^k = (1-x^2) \frac{1-x^{4n+4}}{1-x^4}$ pour tout $x \in [0, 1[$. D'où $(1-x^2) \sum_{k=0}^n (x^4)^k = \frac{1-x^{4n+4}}{1+x^2}$ et on constate que cette formule reste vraie si $x = 1$. D'où

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{(4k+1)(4k+3)} = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^{4n+4}}{1+x^2} dx.$$

$$\text{Or } 0 \leq \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^{4n+4}}{1+x^2} dx \leq \frac{1}{2} \int_0^1 x^{4n+4} dx \leq \frac{1}{2(4n+5)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

$$\text{Donc la série } \sum \frac{1}{(4k+1)(4k+3)} \text{ est convergente et } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(4k+1)(4k+3)} = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} [\arctan(1) - \arctan(0)] = \frac{\pi}{8}.$$

Exercice 5 (Nombres complexes & séries géométriques). Soit un réel $x \in]0, \pi[$. On pose, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) = \cos^{n-1}(x) \cdot \cos[(n+1)x]$. Montrer que la série $\sum f_n(x)$ converge absolument et que $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = -1$.

Soit $x \in]0, \pi[$. La série $\sum f_n(x)$ est absolument convergente car :

- pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|f_n(x)| \leq |\cos(x)|^{n-1}$;
- la série $\sum |\cos x|^{n-1}$ converge car c'est une série géométrique de raison strictement inférieure à 1.

Pour calculer sa somme, on remarque que : $f_n(x) = \operatorname{Re} \left(\cos^{n-1}(x) e^{i(n+1)x} \right)$.

$$\text{D'où } \sum_{n=1}^N f_n(x) = \operatorname{Re} \left(\sum_{n=1}^N \cos^{n-1}(x) e^{i(n+1)x} \right).$$

$$\text{Or } \sum_{n=1}^N \cos^{n-1}(x) e^{i(n+1)x} = e^{i2x} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} (\cos x e^{ix})^n = e^{i2x} \cdot \frac{1 - (\cos x)^N e^{iNx}}{1 - \cos(x) e^{ix}} = e^{i2x} \cdot \frac{1}{1 - \cos(x) e^{ix}} + \varepsilon_N, \text{ où } \varepsilon_N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0 \text{ car } |(\cos x)^N e^{iNx}| = |\cos x|^N \text{ et } |\cos x| < 1 \text{ grâce à l'hypothèse } x \in]0, \pi[.$$

$$\text{D'où } \sum_{n=1}^N \cos^{n-1}(x) e^{i(n+1)x} = e^{i2x} \cdot \frac{1}{\sin^2 x - i \sin x \cos x} + \varepsilon_N = e^{i2x} \cdot \frac{1}{-i \cdot \sin x \cdot e^{ix}} + \varepsilon_N = \frac{ie^{ix}}{\sin x} + \varepsilon_N = \frac{-\sin x + i \cos x}{\sin x} + \varepsilon_N = -1 + i \cot(x) + \varepsilon_N.$$

$$\text{D'où } \sum_{n=1}^N f_n(x) = -1 + \operatorname{Re}(\varepsilon_N). \text{ Donc } \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = -1.$$

Exercice 6. Pour quelles valeurs du réel $a \neq 0$ la série $\sum \frac{(-1)^n}{n^a + (-1)^n}$ est-elle convergente?

Soit $u_n = \frac{(-1)^n}{n^a + (-1)^n}$. Si $a < 0$, alors la suite u_n ne tend pas vers zéro, donc la série $\sum u_n$ diverge.

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^a + (-1)^n} = \frac{(-1)^n}{n^a} - \frac{1}{n^{2a}} (1 + \varepsilon_n).$$

Or la série $\sum \frac{(-1)^n}{n^a}$ converge d'après le TSA car la suite $\frac{1}{n^a}$ tend vers zéro en décroissant. Et les séries $\sum \frac{1}{n^{2a}} (1 + \varepsilon_n)$ et $\sum \frac{1}{n^{2a}}$ sont de même nature car $\frac{1}{n^{2a}}$ ne change pas de signe, donc convergent si, et seulement si, $2a > 1$.

Donc la série $\sum u_n$ converge si, et seulement si, $a > \frac{1}{2}$.

Exercice 7. 1. Soit un réel $\alpha > 1$. Justifier que $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ est bien défini pour chaque $n \in \mathbb{N}$ et déterminer un équivalent de R_n quand n tend vers ∞ .

2. On suppose que $\alpha > 2$. Montrer que la série $\sum R_n$ converge et que $\sum_{n=0}^{\infty} R_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha-1}}$. [▷ Familles sommables](#)

1. La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge, son reste R_n est donc bien défini. Et sa limite vaut 0. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ étant continue et décroissante,

$$\left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right]_{n+1}^{N+1} = \int_{n+1}^{N+1} \frac{1}{x^\alpha} dx \leq \sum_{k=n+1}^N \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_n^N \frac{1}{x^\alpha} dx = \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right]_n^N.$$

pour tout $N > n$, par comparaison série-intégrale. Les inégalités larges passent à la limite $N \rightarrow \infty$ ($\triangleleft$ ce n'est pas le théorème des gendarmes qu'on utilise), d'où :

$$\frac{n+1^{-\alpha+1}}{\alpha-1} \leq R_n \leq \frac{n^{-\alpha+1}}{\alpha-1}.$$

On divise chaque membre par $\frac{n^{-\alpha+1}}{\alpha-1}$ qui est strictement positif :

$$\left(\frac{n+1}{n} \right)^{-\alpha+1} \leq \frac{R_n}{\frac{n^{-\alpha+1}}{\alpha-1}} \leq 1.$$

D'après le théorème des gendarmes, $\frac{R_n}{\frac{n^{-\alpha+1}}{\alpha-1}}$ tend vers 1, donc $R_n \sim \frac{n^{-\alpha+1}}{\alpha-1}$.

2. La série $\sum R_n$ converge et $\sum_{n=0}^{\infty} R_n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} = \sum_{(k,n) \in I} \frac{1}{k^\alpha}$, en notant $I = \{(k,n) \in \mathbb{N}^2 \mid k > n\}$. On peut sommer par paquets, donc

$$\sum_{(k,n) \in I} \frac{1}{k^\alpha} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{k-1} \frac{1}{k^\alpha} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^\alpha} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha-1}}.$$

Exercice 8 (La fonction zêta de Riemann). Soit $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$.

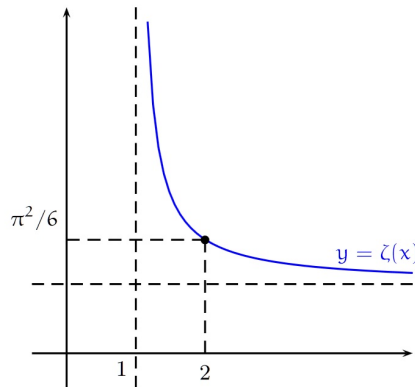


FIGURE 1 – LA FONCTION ζ DE RIEMANN.

1. Montrer que l'ensemble de définition de la fonction ζ est l'intervalle $I =]1, +\infty[$.

2. Montrer que la fonction ζ est décroissante sur l'intervalle I .

3. Montrer que, pour tout $x > 1$, $1 + \frac{1}{(x-1)2^{x-1}} \leq \zeta(x) \leq 1 + \frac{1}{x-1}$.

4. Etudier $\lim_{x \rightarrow +\infty} \zeta(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} \zeta(x)$. Proposer un équivalent de $\zeta(x)$ quand x tend vers 1^+ .

5. Soit $x > 1$. Montrer que la série $\sum \frac{d_n}{n^x}$ converge et que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{n^x} = \zeta(x)^2$, où d_n est le nombre de diviseurs positifs de l'entier n . [▷ Familles sommables](#)

-
1. Le réel $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ est défini si, et seulement si, la série $\sum \frac{1}{n^x}$ converge. C'est le cas si, et seulement si, $x > 1$ d'après le critère de Riemann.
 2. Soient deux réels a et b tels que $1 < a \leq b$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n^a} \geq \frac{1}{n^b}$, d'où $\zeta(a) \geq \zeta(b)$. Donc la fonction ζ est décroissante sur I .
 3. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^x} = e^{-x \ln t}$ est décroissante et continue. D'où (en comparant série et intégrale) :

$$\left[\frac{t^{-x+1}}{-x+1} \right]_2^{N+1} = \int_2^{N+1} \frac{1}{t^x} dt \leq \sum_{n=2}^N \frac{1}{n^x} \leq \int_1^N \frac{1}{t^x} dt = \left[\frac{t^{-x+1}}{-x+1} \right]_1^N.$$

Et les inégalités larges passent à la limite $N \rightarrow \infty$ ($\triangleleft$ ce n'est pas le théorème des gendarmes qu'on utilise) :

$$\frac{1}{(x-1)2^{x-1}} \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^x} \leq \frac{1}{x-1}.$$

Enfin, on ajoute 1 à chaque membre :

$$1 + \frac{1}{(x-1)2^{x-1}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} \leq 1 + \frac{1}{x-1}.$$

4. En $+\infty$, on utilise le théorème des gendarmes : $\frac{1}{(x-1)2^{x-1}}$ et $\frac{1}{x-1}$ tendent vers 0 quand x tend vers $+\infty$, donc $\zeta(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$.

Quand x tend vers 1^+ , $\frac{1}{(x-1)2^{x-1}}$ tend vers $+\infty$. Donc $\zeta(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1^+} +\infty$. Plus précisément, quand x tend vers 1^+ : $\zeta(x) \sim \frac{1}{x-1}$. Pour le prouver, on divise par $\frac{1}{x-1}$ chaque membre de l'encadrement :

$$(x-1) + \frac{1}{2^{x-1}} \leq \frac{\zeta(x)}{\frac{1}{x-1}} \leq (x-1) + 1$$

Les deux gendarmes tendent vers 1 quand x tend vers 1^+ , d'où $\frac{\zeta(x)}{\frac{1}{x-1}} \xrightarrow{x \rightarrow 1^+} 1$.

5. Soit $x > 1$: la série $\sum \frac{1}{n^x}$ converge absolument et $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} = \zeta(x)$. D'où $\zeta(x)^2 = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^x} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q^x}$ et on peut sommer par paquets, donc : la série $\sum \frac{d_n}{n^x}$ converge absolument et $\zeta(x)^2 = \sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*} \frac{1}{p^x} \frac{1}{q^x} = \sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*} \frac{1}{(pq)^x} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p \mid n} \frac{1}{p^x} \frac{1}{n/p^x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{n^x}$ car $\text{Card}\{(p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \mid pq = n\} = d_n$.

Exercice 9 (Série télescopique & théorème de sommation des équivalents). Soit la suite définie par $u_0 \in]0, 1]$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sin u_n$.

1. Montrer que la suite (u_n) est convergente et que sa limite est nulle.
2. Étudier la limite de $\frac{u_{n+1} - u_n}{u_n^3}$. En déduire la nature de la série de terme général u_n^3 .
3. En étudiant $\ln(\frac{u_{n+1}}{u_n})$, montrer que la série de terme général u_n^2 diverge.
4. À l'aide d'un D.L., déterminer un réel α tel que $u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha$ converge vers une limite non nulle. En déduire un équivalent de u_n .

-
1. Par récurrence, $u_n \in]0, 1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'une part, la suite (u_n) est donc minorée (par 0). D'autre part, elle est décroissante : $u_{n+1} = \sin u_n \leq u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ car $\sin x \leq x$ pour tout $x \geq 0$. La suite (u_n) est donc convergente car décroissante et minorée. Soit $\ell \in \mathbb{R}$ sa limite.

La fonction $\sin$ est continue, donc ℓ est un point fixe : $\ell = \sin \ell$. Or 0 est l'unique point fixe de la fonction $\sin$ (pour le prouver, étudier la fonction $]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x - \sin x$). La suite (u_n) tend donc vers 0.

2. Un développement limité fournit $\frac{\sin x - x}{x^3} = -\frac{1}{3!} + o(1)$ donc $\frac{u_{n+1} - u_n}{u_n^3} \rightarrow -\frac{1}{6}$ quand $n \rightarrow \infty$. car $u_n \rightarrow 0$.

On en déduit l'équivalence $u_n^3 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -6(u_{n+1} - u_n)$ qui ne change pas de signe. Or la série télescopique $\sum (u_{n+1} - u_n)$ converge car la suite (u_n) converge. Donc la série de terme général u_n^3 converge aussi.

3. $\ln(\frac{u_{n+1}}{u_n}) = \ln(\frac{\sin u_n}{u_n}) \sim \frac{\sin u_n - u_n}{u_n} \sim -\frac{1}{6} u_n^2$ qui ne change pas de signe. La série de terme général u_n^2 a la même nature que la série de terme général $\ln(\frac{u_{n+1}}{u_n}) = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$. Celle-ci est télescopique et a donc la même nature que la suite $(\ln u_n)$ qui diverge car $\ln(u_n) \rightarrow -\infty$ car u_n tend vers 0.

4. De $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, on déduit le D.L. $u_{n+1} = \sin u_n = u_n - \frac{u_n^3}{3!} + o(u_n^3) = u_n \cdot \left(1 - \frac{u_n^2}{6} + o(u_n^2)\right)$. Par suite $u_{n+1}^\alpha = u_n^\alpha \cdot \left(1 - \alpha \frac{u_n^2}{6} + o(u_n^2)\right)$. (À noter que u_n^α est bien défini car $u_n > 0$.) Donc $u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha = -\alpha \frac{u_n^{2+\alpha}}{6} + o(u_n^{2+\alpha})$ tend vers une limite finie et non nulle si $\alpha = -2$. Cette limite vaut $\frac{1}{3}$.

On a montré que $u_{n+1}^{-2} - u_n^{-2}$ est équivalent à $\frac{1}{3}$, qui ne change pas de signe. Or la série $\sum \frac{1}{3}$ diverge, donc les sommes partielles sont équivalentes (d'après le théorème de sommation des équivalents) : $\sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1}^{-2} - u_k^{-2}) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{n}{3}$. Cette somme est télescopique, d'où $u_n^{-2} - u_0^{-2} \sim \frac{n}{3}$. En divisant par n , $\frac{u_n^{-2}}{n}$ tend vers $\frac{1}{3}$. Or u_n est positif, d'où $\frac{u_n^{-1}}{\sqrt{n}}$ tend vers $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Donc $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{\frac{3}{n}}$.

Exercice 10. Soit, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n \frac{pq}{p+q}$.

1. La suite des réels S_n est-elle convergente?
2. Montrer que $u_n = \sum_{p=1}^n \frac{p}{p+n}$ est équivalent à $n(1 - \ln 2)$. [▷ Réviser les sommes de Riemann](#)
3. En déduire un équivalent de $S_n - S_{n-1}$ puis de S_n .

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{(p,q) \in [1,n]^2} \frac{pq}{p+q} \geq \sum_{p \in [1,n]} \frac{p^2}{2p} = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^n \frac{1}{p} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$. Donc la suite S_n diverge.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{u_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{p=1}^n \frac{\frac{p}{n}}{\frac{p}{n} + 1}$ est une somme de Riemann de la fonction $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{x}{x+1}$ qui est continue sur le segment $[0, 1]$, d'où $\frac{u_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x}{x+1} dx = 1 - \ln 2$. Donc $u_n \sim n(1 - \ln 2)$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n - S_{n-1} = 2 \sum_{p=1}^n \frac{np}{p+n} - \frac{n}{2} = 2nu_n - \frac{n}{2}$, d'où $S_n - S_{n-1} \sim 2n^2(1 - \ln 2)$. On sort le télescope : $S_n = \frac{1}{2} + \sum_{k=2}^n (S_k - S_{k-1})$ pour tout $n \geq 2$. Or $S_n - S_{n-1} \sim 2n^2(1 - \ln 2)$ qui ne change pas de signe, d'où : les deux séries divergent et, par sommation des équivalents, $S_n \sim 2(1 - \ln 2) \sum_{k=2}^n k^2 \sim 2(1 - \ln 2) \frac{n^3}{3}$.

Exercice 11 (Semi-convergence). Soit une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que la série $\sum u_n$ converge mais la série $\sum |u_n|$ diverge. Soient P_n et M_n les suites définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P_n = \max(0, u_n) \quad \text{et} \quad M_n = \min(0, u_n).$$

Montrer que les séries $\sum P_n$ et $\sum M_n$ divergent.

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $u_n = P_n + M_n$. Or la série $\sum u_n$ converge, d'où les séries $\sum P_n$ et $\sum M_n$ sont de même nature.

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| = P_n - M_n$. Or la série $\sum |u_n|$ diverge, d'où les séries $\sum P_n$ et $\sum M_n$ divergent.

Exercice 12. 1. Montrer que la famille $\left(\frac{1}{(p+q)!}\right)_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable et que $\sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} \frac{1}{(p+q)!} = 2e$.

2. Montrer que la famille $\left(\frac{1}{p^2+q^2}\right)_{(p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*}$ n'est pas sommable.

1. Les termes $\frac{1}{(p+q)^2}$ sont positifs. Sous réserve de convergence absolue, on peut sommer par paquets : $\sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} \frac{1}{(p+q)!} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{p+q=n} \frac{1}{(p+q)!}$. Or $\sum_{p+q=n} \frac{1}{(p+q)!} = \sum_{p+q=n} \frac{1}{n!} = \frac{n+1}{n!} = \frac{n}{n!} + \frac{1}{n!}$. D'où $\sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} \frac{1}{(p+q)!} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{n}{n!} + \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n!}$. D'une part $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n!} = e$. D'autre part $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{n}{n!} = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{(n-1)!} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n!} = e$. Donc la famille $\left(\frac{1}{(p+q)!}\right)_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable et $\sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} \frac{1}{(p+q)!} = 2e$.

2. Pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, $(p+q)^2 = p^2 + q^2 + 2pq \geq p^2 + q^2 \geq 0$, d'où $\frac{1}{p^2+q^2} \geq \frac{1}{(p+q)^2} \geq 0$. Sous réserve de convergence absolue, on peut sommer par paquets : $\sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*} \frac{1}{(p+q)^2} = \sum_{n \geq 2} \sum_{I_n} \frac{1}{(p+q)^2} = \sum_{n \geq 2} \sum_{I_n} \frac{1}{n^2}$, en notant $I_n = \{(p, q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \mid p+q = n\}$. Or $\text{Card}(I_n) = n-1$, d'où $\sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*} \frac{1}{(p+q)^2} = \sum_{n \geq 2} \frac{n-1}{n^2}$. Or la série $\sum \frac{n-1}{n^2}$ car $\frac{n-1}{n^2} \sim \frac{1}{n}$ qui ne change pas de signe et la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge. Donc la famille $\left(\frac{1}{p^2+q^2} \right)_{(p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*}$ n'est pas sommable.

Exercice 13. Soit $x \in]-1, +1[$. En remarquant que tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ s'écrit de manière unique $(2q+1)2^p$, montrer que la série $\sum \frac{x^{2^p}}{1-x^{2^{p+1}}}$ converge et $\sum_{p=0}^{\infty} \frac{x^{2^p}}{1-x^{2^{p+1}}} = \frac{x}{1-x}$.

Soit $x \in]-1, +1[$: la famille $(x^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est sommable et $\frac{x}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} x^{(2q+1)2^p}$. On peut sommer par paquets, donc $\frac{x}{1-x} = \sum_{p=0}^{\infty} x^{2^p} \sum_{q=0}^{\infty} x^{2^{p+1}q} = \sum_{p=0}^{\infty} x^{2^p} \frac{1}{1-x^{2^{p+1}}}$ et la série $\sum \frac{x^{2^p}}{1-x^{2^{p+1}}}$ converge absolument.