

Chapitre II Algèbre linéaire

Table des matières

II.1	Matrices semblables, trace et déterminant	9
II.2	Noyau, image et rang	10
II.3	Intersection, produit et somme de <i>sev</i>	11
II.4	Stabilité d'un <i>sev</i> par un endomorphisme	13
II.5	Polynômes d'un endomorphisme	15
II.6	Polynômes annulateurs	16
II.7	Le polynôme minimal	17
II.8	Le lemme des noyaux	18

II.1 MATRICES SEMBLABLES, TRACE ET DÉTERMINANT

Se rappeler d'abord les **formules de passage** : soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie n , $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E et $P \in GL_n(\mathbb{K})$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$:

- si $X = [x]_{\mathcal{B}} \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ est la matrice colonne des coordonnées d'un vecteur $x \in E$ dans la base $\mathcal{B}$ et $X' = [x]_{\mathcal{B}'}$ la matrice colonne des coordonnées du même vecteur x dans la base $\mathcal{B}'$, alors

$$X = P X'$$

- si $A = [u]_{\mathcal{B}} \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ est la matrice carrée d'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ dans la base $\mathcal{B}$ et $A' = [u]_{\mathcal{B}'}$ la matrice carrée du même endomorphisme u dans la base $\mathcal{B}'$, alors

$$A' = P^{-1} A P$$

On dit que deux matrices A et A' de $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ sont **semblables** s'il existe une matrice inversible P telle que $A' = P^{-1} A P$. Autrement dit, deux matrices sont semblables si, et seulement si, elles représentent un même endomorphisme dans deux bases.

EXERCICE 1 — Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une matrice inversible P (quelle est cette matrice ? est-elle unique ?) telle que

$$P^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \cdot P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Se rappeler que la **trace** et le **déterminant** d'une matrice carrée $A = (a_{ij})_{(i,j) \in [1,n]^2} \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ sont définis par

$$\text{tr}(A) = a_{11} + \cdots + a_{nn} = \sum_{i=1}^n a_{ii} \quad \text{et} \quad \det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i)i}.$$

La trace est linéaire : $\text{tr}(\alpha A + \beta B) = \alpha \text{tr} A + \beta \text{tr} B$ pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ et $A, B \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$. Pas le déterminant : $\det(A + B) \neq \det A + \det B$ et $\det(\alpha A) = \alpha^n \det A$. Mais le déterminant est multilinéaire (*i.e.* linéaire par rapport à chacune de ses colonnes) et antisymétrique (il change de signe si on échange deux colonnes).

Soient A et B deux matrices carrées :

$$\operatorname{tr}(A^T) = \operatorname{tr}(A) \quad \text{et} \quad \det(A^T) = \det(A),$$

$$\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA) \quad \text{et} \quad \det(AB) = \det(A) \cdot \det(B) = \det(BA)$$

Par suite, deux matrices semblables ont la même trace et le même déterminant : la matrice d'un endomorphisme u change quand on change de base (A devient $A' = P^{-1}AP$) mais ni la trace ni le déterminant de cette matrice ne changent : $\operatorname{tr} A' = \operatorname{tr} A$ et $\det A' = \det A$. (On dit que la trace et le déterminant sont des **invariants de similitude**.)

On peut donc parler de la trace ou du déterminant d'un endomorphisme u , sans préciser dans quelle base :

$$\operatorname{tr}(u) = \operatorname{tr}([u]_{\mathcal{B}}) \quad \text{et} \quad \det(u) = \det([u]_{\mathcal{B}})$$

ne dépendent pas de la base $\mathcal{B}$. De plus :

$$\operatorname{tr}(u \circ v) = \operatorname{tr}(v \circ u) \quad \text{et} \quad \det(u \circ v) = \det(u) \det(v) = \det(v \circ u).$$

II.2 NOYAU, IMAGE ET RANG

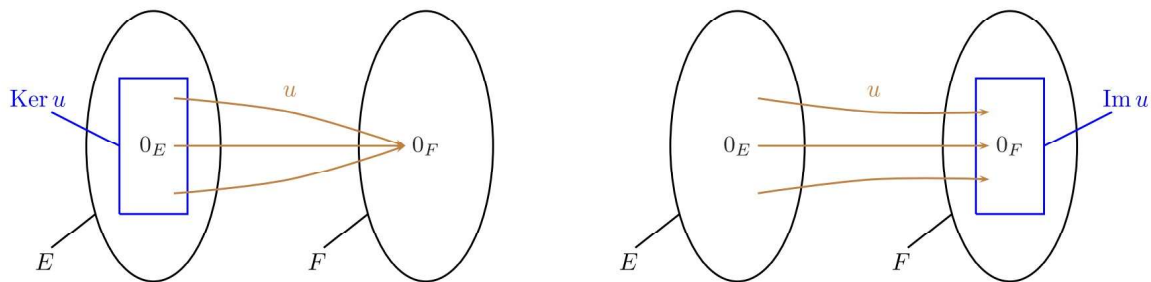


FIGURE II.1 – NOYAU & IMAGE D'UNE APPLICATION LINÉAIRE

Soient E et F deux espaces vectoriels, u une application linéaire de E vers F . Se rappeler que le **noyau** et l'**image** de u sont définis par :

$$\forall x \in E, \quad x \in \operatorname{Ker} u \iff u(x) = 0_F \quad \text{et} \quad \forall y \in F, \quad y \in \operatorname{Im} u \iff \exists x \in E, \quad y = u(x).$$

Le noyau de u est un *sev* de E ; l'image de u est un *sev* de F et, plus généralement, l'image directe d'un *sev* de E est un *sev* de F .

$$u \text{ injectif} \iff \operatorname{Ker} u = \{0_E\} \quad \text{et} \quad u \text{ surjectif} \iff \operatorname{Im} u = F.$$

EXERCICE 2 — Montrer que tout supplémentaire du noyau $\operatorname{Ker} u$ d'un endomorphisme u est isomorphe à l'image $\operatorname{Im} u$.

Si E est de dimension finie, il en résulte le **théorème du rang** :

$$\dim E = \dim \operatorname{Ker}(u) + \underbrace{\dim \operatorname{Im}(u)}_{=\operatorname{rg}(u) \text{ par déf}}$$

Et son corollaire dans le cas où $\dim E = \dim F$ (*a fortiori* dans le cas où u est un endomorphisme) :

$$u \text{ injectif} \iff u \text{ surjectif} \iff u \text{ bijectif} \iff \det(u) \neq 0.$$

REMARQUE 3 — *Le théorème du rang ne dit pas que noyau et image sont toujours supplémentaires : penser à la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.*

EXERCICE 4 — Se rappeler qu'une **forme linéaire** est une application linéaire d'un $\mathbb{K}$ -ev E vers $\mathbb{K}$.

1. Montrer qu'une forme linéaire est, ou bien nulle, ou bien surjective.

Se rappeler que le noyau $\text{Ker } u$ d'une forme linéaire u non nulle est appelé un **hyperplan**.

Soit E un ev de dimension n . Montrer que :

2. tout hyperplan de E est un *sev* de dimension $n - 1$;

3. réciproquement, tout *sev* de dimension $n - 1$ de E est un hyperplan.

La trace $\text{tr} : \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ est une forme linéaire non nulle.

4. Déterminer une base de l'hyperplan $\text{Ker}(\text{tr})$.

II.3 INTERSECTION, PRODUIT ET SOMME DE *sev*

EXERCICE 5 — Soit E un ev.

1. Montrer qu'une intersection de *sev* de E est encore un *sev* de E .

2. Montrer que la réunion de deux *sev* n'est pas toujours un *sev*.

3. Plus précisément : montrer que la réunion de deux *sev* est encore un *sev* si, et seulement si, l'un des deux *sev* est inclus dans l'autre.

4. Montrer que le produit $F_1 \times \cdots \times F_r = \prod_{i=1}^r F_i$ de r *sev* de E est un *sev* de E^r . Et que, si les *sev* F_i sont de dimensions finies, alors

$$\dim \prod_{i=1}^r F_i = \sum_{i=1}^r \dim F_i.$$

DÉFINITION 6

Soient $F_1, \dots, F_r$ des *sev* d'un $\mathbb{K}$ -ev E . On dit que :

1. une partie S de E est la **somme** des *sev* F_i si, pour tout $v \in E$,

$$v \in S \iff \exists (v_1, \dots, v_r) \in F_1 \times \cdots \times F_r, v = v_1 + \cdots + v_r;$$

2. cette somme est **directe** si

$$\forall v \in S, \exists! (v_1, \dots, v_r) \in F_1 \times \cdots \times F_r, v = v_1 + \cdots + v_r;$$

3. les *sev* F_i sont **supplémentaires** si la somme des F_i est directe et égale à l'ev E .

La somme des r *sev* F_i est notée $F_1 + \cdots + F_r$ ou $\sum_{i=1}^r F_i$. Si elle est directe, alors on la note $F_1 \oplus \cdots \oplus F_r$ ou $\bigoplus_{i=1}^r F_i$. Les *sev* sont supplémentaires si, et seulement si, $\bigoplus_{i=1}^r F_i = E$.

EXERCICE 7 — Montrer que les trois *sev*

$$F = \{P \in E \mid P(0) = P(1) = P(2) = 0\}$$

$$G = \{P \in E \mid P(1) = P(2) = P(3) = 0\}$$

$$H = \{P \in E \mid P(X) = P(-X)\}$$

de l'ev $E = \mathbb{R}_3[X]$ sont supplémentaires.

PROPOSITION 8

Soient $F_1, \dots, F_r$ des *sev* d'un $\mathbb{K}$ -ev E .

1. La somme des *sev* F_i de E est encore un *sev* de E .
2. Si les *sev* F_i sont de dimensions finies, alors $\dim \sum_{i=1}^r F_i \leq \sum_{i=1}^r \dim F_i$.
3. La somme des *sev* F_i est directe si, et seulement si, $\dim \sum_{i=1}^r F_i = \sum_{i=1}^r \dim F_i$.

Preuve — On utilise l'application $\varphi : \prod_{i=1}^r F_i \rightarrow E, (v_1, \dots, v_r) \mapsto v_1 + \dots + v_r$.

1. $\text{Im } \varphi$ est un *sev* de E car φ est linéaire. Et $\text{Im } \varphi = \sum_{i=1}^r F_i$, qui est donc un *sev*.
2. D'après le théorème du rang, $\dim \prod_{i=1}^r F_i = \dim \text{Ker } \varphi + \dim \text{Im } \varphi$, d'où $\dim \sum_{i=1}^r F_i = \dim \text{Im } \varphi \leq \dim \prod_{i=1}^r F_i = \sum_{i=1}^r \dim F_i$.
3. D'après la définition 6, la somme des F_i est directe si, et seulement si, φ est injective si, et seulement si, $\dim \text{Ker } \varphi = 0$.

□

EXERCICE 9 (sur la somme de deux sous-espaces vectoriels) — Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de dimensions finies d'un espace vectoriel E . En utilisant l'application $\varphi : F \times G \rightarrow E, (x_1, x_2) \mapsto x_1 + x_2$, montrer que :

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G) \quad \text{et} \quad \text{la somme } F + G \text{ est directe} \iff F \cap G = \{0_E\}$$

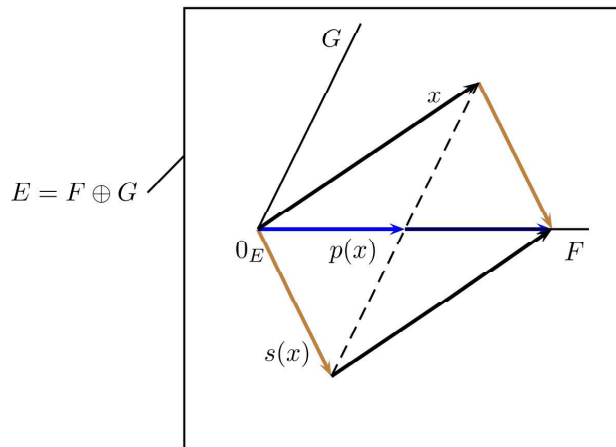


FIGURE II.2 – SYMÉTRIE ET PROJECTEUR

REMARQUE 10 (sur les **projecteurs**) — Si F et G sont deux *sev* de E supplémentaires, alors tout vecteur $x \in E$ s'écrit de manière unique $x = x_1 + x_2$, où $(x_1, x_2) \in F \times G$. On peut donc définir le projeté $p(x)$ de

x sur F parallèlement à G et le symétrique $s(x)$ de x par rapport à F parallèlement à G ainsi : $p(x) = x_1$ et $s(x) = x_1 - x_2$.

Pour tout $x \in E$, $x + s(x) = 2p(x)$, d'où $\text{id}_E + s = 2p$. Se rappeler qu'un endomorphisme

$$\begin{cases} p \text{ est un projecteur} & \iff p \circ p = p \\ s \text{ est une symétrie} & \iff s \circ s = \text{id} \end{cases} \quad \text{et que} \quad \begin{cases} p \text{ projette sur } \text{Im } p \text{ parallèlement à } \text{Ker } p \\ s \text{ est la symétrie par rapport à } \text{Ker}(s - \text{id}) \text{ parallèlement à } \text{Ker}(s + \text{id}) \end{cases}$$

EXERCICE 11 — Soit E un *ev* de dimension finie. Montrer que : si p est un projecteur, alors $\text{tr}(p) = \text{rg}(p)$ est égal à la dimension du *sev* sur lequel p projette.

Si $E = F \oplus G$, on peut aussi définir le projecteur q sur G parallèlement à F . Alors

$$p + q = \text{id}_E, \quad p \circ p = p, \quad q \circ q = q \quad \text{et} \quad p \circ q = q \circ p = 0.$$

De même, si $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_r$, alors tout vecteur $x \in E$ s'écrit de manière unique $x = x_1 + \cdots + x_r$, où $(x_1, \dots, x_r) \in F_1 \times \cdots \times F_r$. Pour chaque $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, l'application $p_i : E \rightarrow E$, $x \mapsto x_i$ est le projecteur sur F_i parallèlement à $F_i^\perp$. Alors

$$p_1 + \cdots + p_r = \text{id}_E \quad \text{et} \quad \forall (i, j) \in \llbracket 1, r \rrbracket^2, \quad p_i \circ p_j = \begin{cases} p_i & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

PROPOSITION 12 (Hyperplans)

Soit H un *sev* d'un *ev* E :

- (en dimension finie ou infinie) H est un hyperplan de E ssi H est le noyau d'une forme linéaire non nulle (c'est la définition), ssi H est un supplémentaire d'une droite vectorielle ;
- (en dimension finie $n = \dim E$) H est un hyperplan ssi $\dim H = n - 1$.

Preuve — Supposons que H est le noyau $\text{Ker } \varphi$ d'une forme linéaire non nulle φ . Dans le $\mathbb{K}$ -*ev* E (de dimension finie ou infinie), il existe des vecteurs u n'appartenant pas à l'hyperplan H (car la forme linéaire est non nulle). De plus, si u est un tel vecteur n'appartenant pas à H , alors l'hyperplan H et la droite $\text{Vect}(u)$ sont supplémentaires : $H \oplus \text{Vect}(u) = E$.

En effet, $\varphi(u) \neq 0_{\mathbb{K}}$. D'où, en posant le vecteur $a = \frac{1}{\varphi(u)}u$, il vient que :

- $H + \text{Vect}(u) = E$ car tout vecteur x de E s'écrit $x = \varphi(x)a + x - \varphi(x)a$, or le vecteur $\varphi(x)a$ appartient à la droite $\text{Vect}(u)$ et le vecteur $x - \varphi(x)a$ appartient à l'hyperplan H ;
- la somme $H + \text{Vect}(u)$ est directe car $H \cap \text{Vect}(u) = \{0_E\}$. En effet, si $x \in \text{Vect}(u)$, alors $\exists \lambda \in \mathbb{K}$, $x = \lambda u$. Or $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\varphi(\lambda u) = \lambda \varphi(u) = 0 \implies \lambda = 0 \implies x = 0_E$.

Réciproquement, si H est un supplémentaire d'une droite vectorielle, alors il existe un vecteur u non nul tel que $H \oplus \text{Vect}(u) = E$. Tout vecteur $x \in E$ s'écrit alors, de manière unique, $x = y + \alpha u$, où $y \in H$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Parce que α est unique et dépend de x , on peut le noter $\varphi(x)$. L'application $\varphi : E \rightarrow \mathbb{K}$, $x \mapsto \alpha = \varphi(x)$ est une forme linéaire non nulle (car $\varphi(u) = 1$) et H en est le noyau.

En dimension finie n , la preuve est fournie par l'exercice 4. □

II.4 STABILITÉ D'UN *sev* PAR UN ENDOMORPHISME

DÉFINITION 13

Soient E un espace vectoriel, F un sous-espace vectoriel de E et $u : E \rightarrow E$ un endomorphisme. On dit que F est **stable par** u si $\forall x \in F, u(x) \in F$, autrement dit : $u(F) \subset F$.

Si un sous-espace vectoriel F de E est stable par u , alors on peut restreindre l'ensemble de départ (c'est toujours possible) et l'ensemble d'arrivée (c'est possible car F est stable par u) pour définir l'application

$$u|_F : F \rightarrow F, \quad x \mapsto u(x).$$

Cette application est l'endomorphisme **induit** sur F par u , c'est un endomorphisme de F .

EXEMPLE 14 — 1. La dérivation $D : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$, $P(X) \mapsto P'(X)$ est un endomorphisme. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, le sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par D .

2. Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans un ev E ($E = F \oplus G$), alors F et G sont stables par le projecteur p sur F parallèlement à G . Et aussi par la symétrie s par rapport à F parallèlement à G . De plus,

$$p|_F = \text{id}_F, \quad p|_G = 0, \quad s|_F = \text{id}_F \quad \text{et} \quad s|_G = -\text{id}_G.$$

EXERCICE 15 — La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ représente un endomorphisme u dans une base (i, j, k) de $\mathbb{R}^3$. Interpréter géométriquement cet endomorphisme. Déterminer trois droites vectorielles stables par u . En déduire une matrice inversible P telle que la matrice $P^{-1}AP$ est diagonale.

PROPOSITION 16

Soient $u : E \rightarrow E$ et $v : E \rightarrow E$ deux endomorphismes d'un espace vectoriel E . Si u et v commutent ($u \circ v = v \circ u$), alors le noyau $\text{Ker } u$ et l'image $\text{Im } u$ de u sont des sous-espaces vectoriels stables par v .

Preuve — Soit $x \in \text{Ker } u$. On veut montrer que $v(x) \in \text{Ker } u$:

$$u(v(x)) = u \circ v(x) = v \circ u(x) = v(0_E) = 0_E, \text{ d'où } v(x) \in \text{Ker } u.$$

Soit $y \in \text{Im } u$. On veut montrer que $v(y) \in \text{Im } u$:

$$\text{il existe } x \in E \text{ tel que } y = u(x). \text{ D'où } v(y) = v \circ u(x) = u \circ v(x) \in \text{Im } u. \quad \square$$

EXERCICE 17 — Soient u et v deux endomorphismes qui commutent. Montrer que l'ensemble des vecteurs invariants par u est un sev. Et que ce sev est stable par v .

Soit $E = F_1 \oplus F_2$ la somme directe de deux sous-espaces vectoriels F_1 (de dimension d_1) et F_2 (de dimension d_2). Dans une base $(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ adaptée à cette somme directe, la matrice A de u est **triangulaire par blocs** si, et seulement si, F_1 est stable par u :

$$A = \begin{matrix} & \xleftrightarrow{d_1} & & \xleftrightarrow{d_2} & \\ \begin{matrix} \uparrow d_1 \\ \downarrow d_2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} A_{11} & \vdots & A_{12} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & A_{22} \end{pmatrix} & & \end{matrix}, \quad \text{où} \quad A_{11} = \text{Mat}_{\mathcal{B}_1}(u|_{F_1}).$$

Elle est **diagonale par blocs** si, et seulement si, F_1 et F_2 sont stables par u :

$$A = \begin{matrix} & \xleftrightarrow{d_1} & & \xleftrightarrow{d_2} & \\ \begin{matrix} \uparrow d_1 \\ \downarrow d_2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} A_{11} & \vdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & A_{22} \end{pmatrix} & & \end{matrix}, \quad \text{où} \quad A_{11} = \text{Mat}_{\mathcal{B}_1}(u|_{F_1}) \text{ et } A_{22} = \text{Mat}_{\mathcal{B}_2}(u|_{F_2}).$$

MÉTHODE 18 (Calculer par blocs) — 1. On peut multiplier par blocs deux matrices :

$$\begin{matrix} \begin{matrix} \uparrow d_1 \\ \downarrow d_2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} & \cdot & \begin{matrix} \uparrow d_1 \\ \downarrow d_2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} & = & \begin{matrix} \uparrow d_1 \\ \downarrow d_2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{pmatrix} \end{matrix}$$

2. On en déduit que le déterminant d'une matrice

$$A = \begin{matrix} & \xleftrightarrow{d_1} & & \xleftrightarrow{d_2} & \\ \begin{matrix} \uparrow d_1 \\ \downarrow d_2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} A_{11} & \vdots & A_{12} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & A_{22} \end{pmatrix} & & \end{matrix}$$

triangulaire par blocs est $\det A = \det A_{11} \times \det A_{22}$.

$$\text{Preuve} - \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} I_{d_1} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}}_M \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} I_{d_1} & A_{12} \\ 0 & I_{d_2} \end{pmatrix}}_N \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & I_{d_2} \end{pmatrix}}_P,$$

d'où $\det A = \det M \cdot \det N \cdot \det P$. Or $\det M = \det A_{22}$ (développer en suivant les premières colonnes), $\det N = 1$ (déterminant triangulaire) et $\det P = \det A_{11}$ (développer en suivant les dernières colonnes). $\square$

On peut généraliser les propriétés ci-dessus à plus de deux sous-espaces vectoriels :

EXERCICE 19 — Soient deux matrices T triangulaire par blocs et D diagonale par blocs :

$$T = \begin{pmatrix} \begin{matrix} \xleftrightarrow{d_1} & \xleftrightarrow{d_2} & \cdots & \xleftrightarrow{d_p} \\ \downarrow d_1 & \downarrow d_2 & & \downarrow d_p \\ \begin{matrix} A_{11} & \vdots & A_{12} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & A_{22} \end{matrix} & \cdots & * \\ \vdots & & \ddots & \ddots \\ 0 & & & \ddots \\ \downarrow d_p & & & \downarrow d_p \\ \begin{matrix} 0 & \cdots & \vdots & A_{pp} \end{matrix} \end{matrix} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} \begin{matrix} \xleftrightarrow{d_1} & \xleftrightarrow{d_2} & \cdots & \xleftrightarrow{d_p} \\ \downarrow d_1 & \downarrow d_2 & & \downarrow d_p \\ \begin{matrix} A_{11} & \vdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & A_{22} \end{matrix} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots \\ 0 & & & \ddots \\ \downarrow d_p & & & \downarrow d_p \\ \begin{matrix} 0 & \cdots & \vdots & A_{pp} \end{matrix} \end{matrix} \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $\det T = \det D = \det A_{11} \times \det A_{22} \times \cdots \times \det A_{pp} = \prod_{i=1}^p \det A_{ii}$.
2. On suppose qu'un espace vectoriel $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$ est la somme directe de p sous-espaces vectoriels F_i de dimensions d_i et de bases $\mathcal{B}_i$. Dans la base $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \cdots, \mathcal{B}_p)$ de E adaptée à cette somme directe, la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est :
 - de la forme D diagonale par blocs si, et seulement si, $\cdots$
 - de la forme T triangulaire par blocs si, et seulement si, $\cdots$

II.5 POLYNÔMES D'UN ENDOMORPHISME

DÉFINITION 20

Soit un polynôme $P = \sum_{k=0}^N a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$.

1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E . On note $P(u)$ l'endomorphisme

$$P(u) = \sum_{k=0}^N a_k u^k = a_0 \text{id}_E + a_1 u + \cdots + a_N u^N, \quad \text{où } u^0 = \text{id}_E \text{ et } u^k = \underbrace{u \circ u \circ \cdots \circ u}_{k \text{ fois}}.$$

2. Soit une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$. On note $P(A)$ la matrice

$$P(A) = \sum_{k=0}^N a_k A^k = a_0 I_n + a_1 A + \cdots + a_N A^N, \quad \text{où } A^0 = I_n \text{ et } A^k = \underbrace{A \cdot A \cdots A}_{k \text{ fois}}.$$

Si E est de dimension finie, alors on peut représenter l'endomorphisme u par sa matrice dans une base $\mathcal{B}$ de E et on constate que :

$$[P(u)]_{\mathcal{B}} = P([u]_{\mathcal{B}}).$$

PROPOSITION 21

Soient un espace vectoriel E et un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$. Pour tous $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$,

$$(\alpha P + \beta Q)(u) = \alpha P(u) + \beta Q(u) \quad \text{et} \quad (P \times Q)(u) = P(u) \circ Q(u).$$

Preuve —

(i) Soient $P = \sum_{k=0}^N a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^N b_k X^k$. Pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$,

$$\begin{aligned} (\alpha P + \beta Q)(u) &= \left(\sum_{k=0}^N (\alpha a_k + \beta b_k) X^k \right) (u) \\ &= \sum_{k=0}^N (\alpha a_k + \beta b_k) u^k = \alpha \sum_{k=0}^N a_k u^k + \beta \sum_{k=0}^N b_k u^k \\ &= \alpha P(u) + \beta Q(u). \end{aligned}$$

(ii) On commence par les cas particuliers $P = X^p$ et $Q = X^q$:

$$(P \times Q)(u) = X^{p+q}(u) = u^{p+q} = u^p \circ u^q = P(u) \circ Q(u).$$

Puis on généralise à tous les polynômes P et Q en utilisant (i).

□

De même, soit A une matrice carrée. Pour tous $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$,

$$(\alpha P + \beta Q)(A) = \alpha P(A) + \beta Q(A) \quad \text{et} \quad (P \times Q)(A) = P(A) \cdot Q(A).$$

EXERCICE 22 — Soient A et B deux matrices semblables et P un polynôme. Montrer que :

$$P(A) \text{ et } P(B) \text{ sont semblables} \quad \text{et} \quad P(A^T) = (P(A))^T.$$

II.6 POLYNÔMES ANNULATEURS

DÉFINITION 23

Soient un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E et un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$.

1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E . On dit que P est un **polynôme annulateur** de u si $P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Autrement dit : si $\forall x \in E, P(u)(x) = 0_E$.
2. Soit une matrice $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$. On dit que P est un polynôme annulateur de A si $P(A) = 0_{\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})}$.

EXEMPLE 24 — Un endomorphisme u est

- un projecteur si, et seulement si, $X^2 - X$ est un polynôme annulateur de u .
- une symétrie si, et seulement si, $X^2 - 1$ est un polynôme annulateur de u .

EXERCICE 25 — Soient $n \geq 2$ et la matrice

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K}).$$

Calculer $(I_n + J)^2$ et en déduire que $X^2 - (n-2)X - (n-1)$ est un polynôme annulateur de J .

MÉTHODE 26 (**Inverser une matrice**) — Si $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_NX^N$ est un polynôme annulateur d'une matrice A et si $a_0 \neq 0$, alors $A \cdot (a_1I_n + a_2A + \cdots + a_NA^{N-1}) = -a_0I_n$. Donc la matrice A est inversible et son inverse est

$$A^{-1} = -\frac{1}{a_0} \sum_{k=1}^N a_k A^{k-1}.$$

EXERCICE 27 — Montrer que la matrice J est inversible et que $J^{-1} = \frac{1}{n-1} (J - (n-2)I_n)$.

MÉTHODE 28 (**Calculer les puissances d'une matrice**) — Si $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_NX^N$ (où $a_N \neq 0$) est un polynôme annulateur d'une matrice A , alors la division euclidienne de X^k par P s'écrit

$$X^k = P(X)Q_k(X) + R_k(X) \quad \text{avec} \quad \deg(R_k) < N.$$

Donc $A^k = R_k(A)$.

EXERCICE 29 — Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $J^k \in \text{Vect}(I_n, J)$ et $J^k = (-1)^k I_n + \frac{(n-1)^k - (-1)^k}{n} (I_n + J)$.

II.7 LE POLYNÔME MINIMAL

PROPOSITION-DÉFINITION 30

Toute matrice $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ possède un polynôme annulateur non nul. L'unique polynôme annulateur de A qui est unitaire et de degré minimal est appelé **le polynôme minimal** de A et est noté μ_A (ou π_A). Un polynôme est annulateur de A si, et seulement si, il est divisible par μ_A .

Preuve — Le $\mathbb{K}$ -ev $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ est de dimension n^2 , d'où les $n^2 + 1$ matrices $A^0 = I_n, A^1 = A, A^2, \dots, A^{n^2}$ sont liées, d'où : il existe $(a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n^2}) \in \mathbb{K}^{n^2+1}$ non tous nuls tels que $a_0I_n + a_1A + a_2A^2 + \cdots + a_{n^2}A^{n^2} = 0$. Donc le polynôme $P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_{n^2}X^{n^2}$ est non nul et est annulateur de la matrice A . L'ensemble $\mathcal{I}_A$ des polynômes annulateurs de A n'est donc pas réduit à $\{0\}$. C'est de plus un idéal de l'anneau $\mathbb{K}[X]$ des polynômes, d'après la définition d'un idéal donnée dans l'annexe A.

Donc il existe un unique polynôme unitaire μ_A tel que $\mathcal{I}_A = \mu_A \mathbb{K}[X]$, d'après une proposition de l'annexe A. $\square$

La proposition 30 vaut pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$, donc aussi pour tout endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ si E est de dimension finie. Le polynôme minimal de l'endomorphisme u est noté μ_u (ou π_u).

EXERCICE 31 — 1. Déterminer le polynôme minimal de la matrice J de l'exercice 25.

2. Montrer que la dérivation $D : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}), f \mapsto f'$ ne possède pas de polynôme annulateur non nul.

3. Montrer que deux matrices semblables ont les mêmes polynômes annulateurs et donc le même polynôme minimal.

REMARQUE 32 — Soit $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$. L'application $e_A : \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K}), P \mapsto P(A)$ évalue chaque polynôme P en A . C'est un morphisme d'anneaux, d'espaces vectoriels et même d'algèbres.

Preuve — C'est une conséquence de la proposition 21 et de la propriété $e_A(1) = I_n$ qui résulte de la définition 20. $\square$

Son noyau $\text{Ker}(e_A)$ est donc un idéal de l'anneau $\mathbb{K}[X]$. C'est l'ensemble des polynômes annulateurs de la matrice A , aussi appelé **l'idéal annulateur** de la matrice A .

Son image $\text{Im}(e_A)$, notée $\mathbb{K}[A]$, est donc une sous-algèbre (commutative) de $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$.

PROPOSITION 33

Soit $d = \deg(\mu_A)$ le degré du polynôme minimal de A .

$(I_n, A, \dots, A^{d-1})$ est une base de l'espace $\mathbb{K}[A]$, qui est donc de dimension d :

$$\dim \mathbb{K}[A] = \deg(\mu_A).$$

Preuve — La famille $(I_n, A, \dots, A^{d-1})$ est :

- libre, sinon il existerait des scalaires $a_0, \dots, a_{d-1}$ non tous nuls tels que $a_0 I_n + a_1 A + \dots + a_{d-1} A^{d-1} = 0$ et, par suite $a_0 + a_1 X + \dots + a_{d-1} X^{d-1}$ serait un polynôme annulateur non nul de degré strictement inférieur à $\deg \mu_A$, ce qui est absurde ;
- génératrice de $\mathbb{K}[A]$ car, pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$, la division euclidienne de P par μ_A donne $P = \mu_A \times Q + R$ et $\deg R < \deg \mu_A$. On évalue ces polynômes en A : $P(A) = \mu_A(A) \cdot Q(A) + R(A) = R(A) \in \text{Vect}(I_n, A, \dots, A^{d-1})$.

□

DÉFINITION 34

On dit que :

- un endomorphisme u est **nilpotent** s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^k = 0$;
- une matrice carrée A est nilpotente s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^k = 0$.

Si la matrice A est nilpotente, alors le plus petit entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^k = 0$ est appelé l'**indice** de nilpotence de A . Cet indice est aussi l'unique entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^k = 0$ et $A^{k-1} \neq 0$.

EXERCICE 35 — Soit une matrice $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$, nilpotente d'indice r . Montrer que :

1. le polynôme minimal de A est X^r ;
2. l'indice de nilpotence est inférieur ou égal à la taille de la matrice ($r \leq n$) ;
3. $A^n = 0$.

II.8 LE LEMME DES NOYAUX

LEMME 36 (des noyaux)

Soit u un endomorphisme. Si $P(X) = \prod_{k=1}^r P_k(X)$ est un produit de polynômes $P_1(X), \dots, P_r(X)$ deux à deux premiers entre eux, alors chaque noyau $\text{Ker } P_k(u)$ est stable par u et

$$\text{Ker } P(u) = \bigoplus_{k=1}^r \text{Ker } P_k(u).$$

Preuve — Pour chaque $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$, les endomorphismes u et $v = P_k(u)$ commutent, d'où (proposition 16) le noyau $\text{Ker}(v)$ est stable par u . Puis, par récurrence sur $r \geq 2$:

1. D'abord $r = 2$: d'après le théorème de Bézout, il existe $(A_1, A_2) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que

$$A_1 P_1 + A_2 P_2 = 1, \quad \text{d'où} \quad (A_1 P_1)(u) + (A_2 P_2)(u) = \text{id}_E. \quad (*)$$

- Si $x \in \text{Ker } P_2(u)$, alors $x \in \text{Ker } P(u)$ car $P(u)(x) = (P_1(u) \circ P_2(u))(x) = P_1(u)[P_2(u)(x)] = P_1(u)(0) = 0$.

De même si $x \in \text{Ker } P_1(u)$ car $P(u) = P_1(u) \circ P_2(u) = P_2(u) \circ P_1(u)$. Donc

$$\text{Ker } P_1(u) + \text{Ker } P_2(u) \subset \text{Ker } P(u).$$

- Soit $x \in \text{Ker } P(u)$. D'après (*),

$$x = x_1 + x_2, \quad \text{où} \quad x_1 = (A_2 P_2)(u)(x) \text{ et } x_2 = (A_1 P_1)(u)(x).$$

Or $x_1 \in \text{Ker } P_1(u)$ car

$$P_1(u)(x_1) = (P_1 A_2 P_2)(u)(x) = (A_2(u) \circ P(u))(x) = 0.$$

De même, $x_2 \in \text{Ker } P_2(u)$. Donc

$$\text{Ker } P_1(u) + \text{Ker } P_2(u) = \text{Ker } P(u).$$

— Montrons que la somme est directe.

Si $x \in \text{Ker } P_1(u) \cap \text{Ker } P_2(u)$, alors $x = 0$ car $x = A_2(u) \circ P_2(u)(x) + A_1(u) \circ P_1(u)(x)$ d'après (*). Donc

$$\text{Ker } P_1(u) \oplus \text{Ker } P_2(u) = \text{Ker } P(u).$$

2. Supposons que la propriété est vraie pour r polynômes. Les deux polynômes $Q = P_1 \cdots P_r$ et P_{r+1} sont premiers entre eux. D'où $\text{Ker } Q(u) \oplus \text{Ker } P_{r+1}(u) = \text{Ker } P(u)$. Or $\text{Ker } Q(u) = \bigoplus_{k=1}^r \text{Ker } P_k(u)$, donc $\bigoplus_{k=1}^{r+1} \text{Ker } P_k(u) = \text{Ker } P(u)$. $\square$

Dans le cas particulier où P est un polynôme annulateur de u ,

$$E = \bigoplus_{k=1}^r \text{Ker } P_k(u)$$

car $P(u) = 0$, d'où $\text{Ker } P(u) = E$. Dans une base de E adaptée à cette somme directe, la matrice de u sera diagonale par blocs car chaque noyau $\text{Ker } P_k(u)$ est stable par u .

EXERCICE 37 — Soient E un $\mathbb{K}$ -ev et u un endomorphisme de E tel que $u^3 = u$. Montrer que

$$\text{Ker}(u + \text{id}) \oplus \text{Ker}(u - \text{id}) \oplus \text{Ker}(u) = E$$

de deux manières :

1. par analyse-synthèse ;
2. en utilisant le lemme des noyaux.

