

Exercice 1

Merci à Phylae.

1)

$\sin\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ qui ne change pas de signe

or la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge par critère de Riemann

d'où la série $\sum \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ diverge

2) $\frac{n}{n n^{1/n}} = e^{-\frac{1}{n} \ln n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ car $\frac{\ln n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ par croissances comparées

d'où $\frac{1}{n n^{1/n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ qui ne change pas de signe

or la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge donc la série $\sum \frac{1}{n n^{1/n}}$ diverge

3) Soit $n \in \mathbb{N}$

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{e} \neq 0$$

d'où la série $\sum \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ diverge grossièrement

4)

Soit $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{n^{100}}{e^n} = n^{100} e^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{n}{2}} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(e^{-\frac{n}{2}}\right) \text{ et } e^{-\frac{n}{2}} \text{ ne change pas de signe}$$

(car $n^{100} e^{-\frac{n}{2}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ par croissances comparées)

or la série géométrique $\sum e^{-\frac{n}{2}}$ converge
car $|e^{-\frac{1}{2}}| < 1$

d'où la série $\sum \frac{n^{100}}{e^n}$ converge

5)

La fonction $x \mapsto \frac{1}{x \ln(x)}$ est décroissante et continue sur $]1; +\infty[$
 d'où $\forall n \geq 3$,

$$\sum_{k=3}^n \frac{1}{k \ln(k)} \geq \int_3^{n+1} \frac{1}{x \ln(x)} dx = \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(3))$$

$\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$

d'où la série $\sum \frac{1}{n \ln(n)}$ diverge

6)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$\forall k \in [1; n], \quad 0 \leq \ln(k) \leq \ln(n)$$

$$\text{d'où } \frac{1}{\ln(n!)} = \frac{1}{\sum_{k=1}^n \ln(k)} \geq \frac{1}{n \ln(n)} \geq 0$$

or la série $\sum \frac{1}{n \ln n}$ diverge

donc la série $\sum \frac{1}{\ln(n!)}$ diverge

7)

$$\forall x \in [1; +\infty[, \quad \sqrt{x} \leq x$$

$$\text{d'où } \forall n \geq 3, \quad \sqrt{\ln n} \leq \ln n$$

$$\text{d'où } \forall n \geq 3, \quad e^{\frac{1}{\sqrt{\ln n}}} \geq e^{-\ln n} \quad \text{car la fonction } x \mapsto e^{-x} \text{ est décroissante}$$

$$\text{d'où } \forall n \geq 3, e^{-\sqrt{\ln n}} \gg \frac{1}{n} \gg 0$$

or la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge

d'où la série $\sum e^{-\sqrt{\ln n}}$ diverge

$$8) \forall n \geq 3, \ln(n) \geq \ln(3) = q > 1. \text{ D'où}$$

$$0 \leq \frac{n}{(\ln n)^n} \leq \frac{n}{q^n} = \frac{n}{\sqrt{q}^n} \times \frac{1}{\sqrt{q}^n} = o_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{q}^n} \right). \text{ Or}$$

la série $\sum \left(\frac{1}{\sqrt{q}} \right)^n$ cv car c'est une série géométrique

de raison $\frac{1}{\sqrt{q}} \in]-1, +1[$. Donc la série $\sum \frac{n}{(\ln n)^n}$ cv aussi.

$$9) \text{ Soit } n \in \mathbb{N}^*$$

$$\left(\frac{1}{n} - 1 \right)^n = (-1)^n \left(1 - \frac{1}{n} \right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$\text{car } |(-1)^n \left(1 - \frac{1}{n} \right)^n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{e} \neq 0$$

d'où la série $\sum \left(\frac{1}{n} - 1 \right)^n$ diverge grossièrement

$$10) \text{ Soit } n \in \mathbb{N}^*$$

$$\left(n \sin \frac{1}{n} \right)^n = \left(1 + o\left(\frac{1}{n} \right) \right)^n$$

$$= e^{n \ln \left(1 + o\left(\frac{1}{n} \right) \right)}$$

$$= e^{n \left(o\left(\frac{1}{n} \right) \right)} = e^{o(1)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 \neq 0$$

d'où la série $\sum \left(n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)^n$ diverge grossièrement

19)

Soit $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\sin(\pi \sqrt{n^2+1}) &= \sin\left(\pi n \sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right) \\&= \sin\left(\pi n \left(1 - \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\right) \\&= \sin\left(\pi n - \pi \left(\frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) \\&= (-1)^{n+1} \sin\left(\pi \left(\frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) \\&= (-1)^{n+1} \pi \left(\frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\&= \pi \left(\frac{(-1)^{n+1}}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\end{aligned}$$

* la série $\sum O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ converge

car $\frac{1}{n^2}$ ne change pas de signe

et la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge par critère de Pielou

* la série $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{2n}$ converge d'après le théorème des séries alternées

car $\frac{1}{2n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ et la suite $\left(\frac{1}{2n}\right)$ est décroissante

d'où la série $\sum \sin(\pi \sqrt{n^2+1})$ converge
(par somme de séries convergentes)