

KDO DU 8/09/2026

D'une étude des intégrales de Wallis à la question 1 et
d'un développement asymptotique de $\ln n!$ à la question 2,
on déduit la formule de Stirling à la question 3.

1. On pose, pour chaque entier naturel n ,

$$I_n = \int_0^{\pi/2} (\sin \theta)^n d\theta.$$

- (a) Montrer que, pour tout $n \geq 2$, $I_n = (n-1) \int_0^{\pi/2} (\sin \theta)^{n-2} (\cos \theta)^2 d\theta$.
- (b) En déduire la relation de récurrence $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ pour tout $n \geq 2$.
- (c) Montrer que la suite (I_n) est décroissante.
- (d) En déduire que $\frac{n}{n+1} \leq \frac{I_n}{I_{n-1}} \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
- (e) Montrer que la suite $(nI_n I_{n-1})$ est constante et calculer cette constante.
- (f) En déduire que $I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.
- (g) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $I_{2k} = \frac{(2k)!}{4^k (k!)^2} \cdot \frac{\pi}{2}$.
- (h) En déduire un équivalent de $\frac{(2k)!}{(k!)^2}$.

2. Prouver l'un après l'autre les développements asymptotiques suivants :

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \ln(n!) &= n \ln n + o(n \ln n) \\ \text{(b)} &= n \ln n - n + o(n) \\ \text{(c)} &= n \ln n - n + \frac{1}{2} \ln n + o(\ln n) \\ \text{(d)} &= n \ln n - n + \frac{1}{2} \ln n + K + o(1) \end{aligned}$$

où K est un réel, déterminé à la question suivante.

3. En déduire la formule de Stirling.