

F E U I L L E D E T . D . N° 2

Algèbre linéaire

Exercice 1. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans une base (e_1, e_2, e_3) est donnée par

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer une base de $\text{Ker } f$ et de $\text{Im } f$.
2. Noyau et image sont-ils supplémentaires ?
3. Déterminer une matrice inversible P telle que

$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 2. Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Montrer que l'endomorphisme $f : \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K}[X]$, $P \mapsto P' + P$ est bijectif.
2. Déterminer le noyau de l'endomorphisme $\varphi : \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K}[X]$, $P(X) \mapsto X \cdot [P(X) - P(X - 1)]$. L'endomorphisme φ est-il injectif ? surjectif ?
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\mathbb{K}_n[X]$ est stable par f . Écrire la matrice, dans la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$, de l'endomorphisme induit par f sur $\mathbb{K}_n[X]$.
4. Même question pour φ .

Exercice 3. Soit x_0 un réel. On considère l'application linéaire :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_2[X] &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ P &\longmapsto \left(\int_{-1}^{+1} P(t) dt, P(x_0), P(-x_0) \right). \end{aligned}$$

1. Écrire la matrice, dans les bases canoniques, de l'application linéaire f .
2. Quelles sont les trois valeurs de x_0 pour lesquelles l'application f n'est pas injective ? Déterminer, pour chacune de ces valeurs, une base du noyau de f .
3. Pour quelles valeurs de x_0 l'application f est-elle bijective ? Calculer alors $f^{-1}(a, b, c)$ pour chaque $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

Exercice 4 (Matrices carrées de rang 1). Soit A une matrice carrée telle que $\text{rg}(A) = 1$.

1. En se plaçant dans une base adaptée, montrer que $A^2 = \text{tr}(A) \cdot A$.
2. Montrer qu'il existe deux vecteurs colonnes U et V non nuls tels que : $A = U \cdot V^T$. Redémontrer ainsi le résultat de la question précédente. En utilisant les vecteurs colonnes U et V , déterminer une base de $\text{Im}(A)$ et une équation de l'hyperplan $\text{Ker}(A)$.

Exercice 5. On se place dans $\mathbb{R}^4$ et on considère les sous-espaces vectoriels :

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y = 0, z + t = 0\}$$

$$\text{et } G = \text{Vect} \{(1, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 1)\}.$$

1. Montrer que F et G sont supplémentaires.
2. Déterminer la matrice du projecteur p sur F parallèlement à G dans la base canonique.
3. Calculer la matrice de la symétrie s par rapport à F parallèlement à G dans la base canonique.

Exercice 6. Soient x, y, z et t quatre nombres réels. Calculer, *en le factorisant au maximum*, le déterminant

$$D(x, y, z, t) = \begin{vmatrix} x & y & z & t \\ -x & y & -z & t \\ z & t & x & y \\ -z & t & -x & y \end{vmatrix}.$$

Exercice 7. Calculer, sous une forme factorisée, le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^4 \\ 1 & b & b^2 & b^4 \\ 1 & c & c^2 & c^4 \\ 1 & d & d^2 & d^4 \end{vmatrix}.$$

(Une indication ? Insérer une nouvelle ligne et une nouvelle colonne dans ce déterminant pour faire apparaître un déterminant de Vandermonde.)

Exercice 8 (Formes linéaires). Sur $E = \mathbb{R}_n[X]$, on définit les $n + 1$ formes linéaires :

$$\phi_k : P \mapsto P^{(k)}(0) \quad \text{avec } k \in \{0, \dots, n\}.$$

Montrer que la famille $(\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n)$ est libre.

Exercice 9 (Familles libres & déterminant de Vandermonde). Soient n réels $a_1 < a_2 < \dots < a_n$. Montrer (de deux manières) que les n fonctions définies, pour chaque $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, par

$$f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto e^{a_k x}$$

sont linéairement indépendantes.

Exercice 10. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 + I_n$ ne soit pas inversible.

1. Montrer qu'il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $AX = iX$ et $X \neq 0$.
2. Montrer qu'il existe U et V dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ libres tels que $AU = -V$ et $AV = U$.

Exercice 11. Soit une matrice carrée $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que le réel $\text{tr}(A^T \cdot A)$ est égal à la somme des carrés de tous les éléments de la matrice A .
2. Montrer que : $A^T A = 0 \iff A = 0$.
3. Montrer que $\text{Ker } A = \text{Ker}(A^T \cdot A)$.
4. Soit la forme linéaire

$$\tau_A : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad M \mapsto \text{tr}(A^T \cdot M).$$

Calculer l'image $\tau_A(E_{ij})$ de chaque matrice E_{ij} de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer, de deux manières, que : la forme linéaire τ_A est nulle si, et seulement si, la matrice A est nulle.

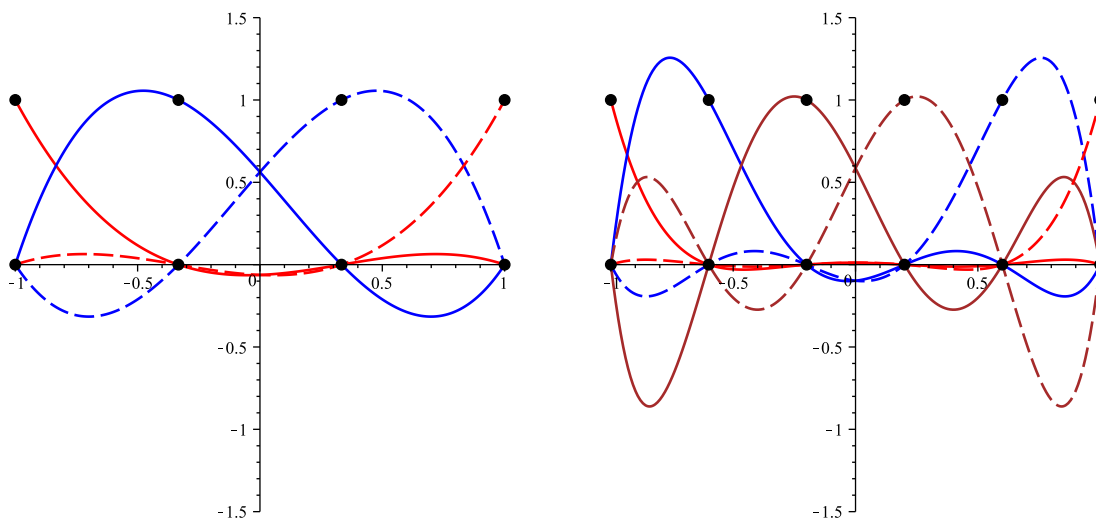
Exercice 12 (Polynômes de Lagrange & déterminant de Vandermonde). Soient un entier $n \geq 2$ et n réels $a_1, a_2, \dots, a_n$ supposés distincts deux à deux. Soit l'application

$$\varphi : \mathbb{R}_{n-1}[X] \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad P \mapsto (P(a_1), P(a_2), \dots, P(a_n)).$$

1. Montrer que l'application φ est linéaire et déterminer son noyau.
2. On munit les $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $\mathbb{R}^n$ de leur base canonique : $(1, X, \dots, X^{n-1})$ et $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ respectivement. Écrire la matrice M représentant φ dans ces bases. Quel est le déterminant de cette matrice ?
3. Les n polynômes de Lagrange $L_1, L_2, \dots, L_n$ sont définis par

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad L_i(X) = \prod_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i\}} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}.$$

Calculer $\varphi(L_i)$ pour chaque $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.



LES POLYNÔMES DE LAGRANGE POUR $n = 4$ ET $n = 6$ RÉELS ÉQUIDISTANTS DANS $[-1, +1]$

4. En utilisant à chaque fois une des trois questions précédentes, démontrer de trois manières que l'application φ est bijective.
5. Montrer que $(L_1, L_2, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
6. Reconnaître les polynômes

$$\sum_{i=1}^n P(a_i) L_i(X) \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^n L_i(X).$$

Exercice 13 (Les noyaux des itérés sont emboîtés).

Soient E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et f un endomorphisme de E .

1. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\text{Ker}(f^k) \subset \text{Ker}(f^{k+1}) \quad \text{et} \quad \text{Im}(f^{k+1}) \subset \text{Im}(f^k).$$

2. Montrer qu'il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que : $\text{Ker}(f^r) = \text{Ker}(f^{r+1})$.
3. Montrer que, pour tout $k \geq r$: $\text{Ker}(f^k) = \text{Ker}(f^{k+1})$.
4. Montrer que, pour tout $k \geq r$: $\text{Im}(f^k) = \text{Im}(f^{k+1})$.
5. Montrer que $\text{Ker}(f^r)$ et $\text{Im}(f^r)$ sont supplémentaires.

Exercice 14. Soient une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et l'endomorphisme

$$\varphi_A : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad M \mapsto A \cdot M.$$

1. Montrer que l'endomorphisme φ_A est bijectif si, et seulement si, la matrice A est inversible.
2. Déterminer la trace $\text{tr}(\varphi_A)$ de l'endomorphisme φ_A .

Exercice 15 (Polynômes annulateurs). 1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et Φ l'endomorphisme défini par

$$\Phi(M) = (\text{tr } M)I_n + M$$

pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Trouver un polynôme de degré 2 annulateur de Φ .

2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice d'un projecteur et Φ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par

$$\Phi(M) = PM + MP.$$

Déterminer un polynôme annulateur non nul de Φ .

Exercice 16 (Polynômes annulateurs). Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $f : E \rightarrow E$ un endomorphisme. Montrer que : si P et Q sont deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ dont le produit est annulateur de f , alors $\text{Im } Q(f) \subset \text{Ker } P(f)$ et $\text{Im } P(f) \subset \text{Ker } Q(f)$.

Exercice 17. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'elles sont aussi semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 18 (Oral Centrale PSI 2014). Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$.

Montrer que $\dim(\text{Ker } u) \leq \dim(\text{Ker } u^2) \leq 2 \dim(\text{Ker } u)$. (On pourra utiliser l'endomorphisme induit par u sur $\text{Im}(u)$.)

Exercice 19 (Hyperplans). Soit E un espace vectoriel. Soient H et H' deux hyperplans de E . Montrer qu'ils possèdent un supplémentaire commun.

Exercice 20 (Matrices à diagonale strictement dominante). Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, |a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$$

Montrer que A est inversible.