

d) la suite (I_n) est décroissante donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$I_{n+1} \leq I_n \leq I_{n-1}$$

on sait que $I_{n+1} = \frac{n}{n+1} I_n$ d'après la question a. b).

$$\text{d'où } \frac{n}{n+1} I_n \leq I_n \leq I_{n-1}$$

$$\text{et donc } \frac{n}{n+1} \leq \frac{I_n}{I_{n-1}} \leq 1$$

en divisant par I_{n-1} car

Théor. de l'intégrale nulle

[Théor. de l'intégrale nulle :

Si la fonction f est continue et ne change pas de signe sur $[a, b]$ et si $\int_a^b f(x) dx = 0$, alors $\forall x \in [a, b], f(x) = 0$.]

Application : par l'absurde, supposons que $I_n = \int_0^{\pi/2} (\sin \theta)^n d\theta = 0$.
La fonction $\theta \mapsto (\sin \theta)^n$ est continue et positive sur $[0, \pi/2]$,
d'où $\forall \theta \in [0, \pi/2], (\sin \theta)^n = 0$. C'est absurde car $\sin(\pi/2) = 1$.
Donc $I_n \neq 0$.

9) ~~lim~~ $1 + \frac{1}{(x-1)^2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$ et $1 + \frac{1}{x-1} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$

Non

Comme les ~~inégalités~~ ~~longues~~ ~~passent~~ à la limite D'ap. le th. de sandwich,
 $1 \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \leq 1$
 Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$

$1 + \frac{1}{(x-1)^2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ et $1 + \frac{1}{x-1} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$

Non

Comme les ~~inégalités~~ ~~longues~~ ~~passent~~ à la limite
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Le réel $\zeta(x)$

⑧ 1. La fonction ζ est une série, elle n'est donc définie que si $\sum \frac{1}{n^x}$ est CV.

On, d'après le critère de Riemann,

$$\sum \frac{1}{n^x} \text{ CV} \iff x > 1$$

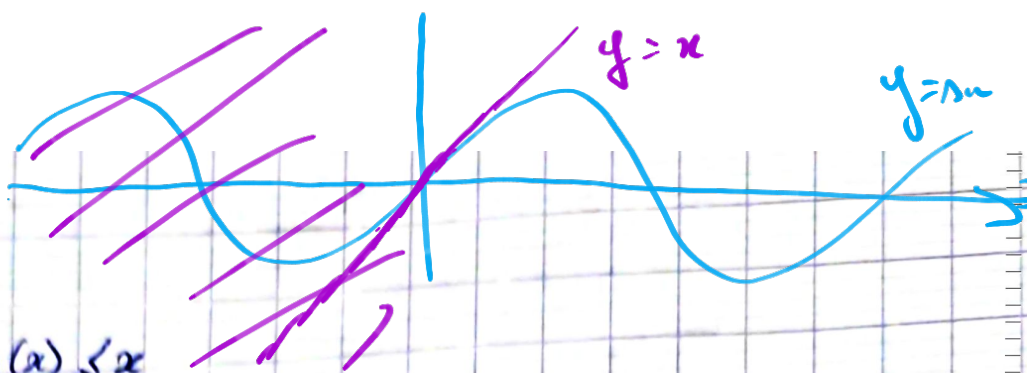
D'où $\zeta(x)$ est défini si $x \in]1, +\infty[$
le réel.

2. On calcule la dérivée de ζ ,
 $\forall x \in]1, +\infty[$,

$$\zeta'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-x}{n^{x+1}}$$

$$\frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} \frac{1}{n^x}$$

Exercice 8 :



o
x

1) $\forall x \in \mathbb{R}_+, \sin(x) < x$

x

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, \sin(u_n) < u_n$
 la suite $u_{n+1} < u_n$
 Donc (u_n) est décroissante

Au préalable, on a $u_n > 0$

Et minorée par zéro donc cc.

$\exists l \in \mathbb{R}, u_n \rightarrow l$

$u_{n+1} = f(u_n)$

$\Rightarrow l = f(l)$

la fonction f est c°

~~ϵ~~ passent à la limite quand $n \rightarrow +\infty$, d'où:
 Ces inégalités larges

$$1 + \frac{1}{(x-1)2^{x-1}} \leq \zeta(x) \leq 1 + \frac{1}{x-1}$$

4) D'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \zeta(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \zeta(x) = 1$$

α $\hookrightarrow$ car $\zeta(x) \rightarrow +\infty$

D'au

$$\int_2^{N+1} f_x(t) dt \leq \sum_{n=2}^N \frac{1}{n^x} \leq \int_1^N f_x(t) dt$$

d'au
(=)

$$\int_2^{N+1} \frac{1}{t^x} dt \leq \sum_{n=2}^N \frac{1}{n^x} \leq \int_1^N \frac{1}{t^x} dt$$

d'au

$$\left[\frac{t^{1-x}}{1-x} \right]_2^{N+1} \leq \sum_{n=2}^N \frac{1}{n^x} \leq \left[\frac{t^{1-x}}{1-x} \right]_1^N$$

d'au

$$\frac{1}{(1-x)(N+1)^{x-1}} - \frac{1}{(1-x)2^{x-1}} \leq \sum_{n=2}^N \frac{1}{n^x} \leq \frac{1}{(1-x)N^{x-1}} - \frac{1}{(1-x)1^{x-1}}$$

d'au

$$\frac{1}{(1-x)(N+1)^{x-1}} + \frac{1}{(x-1)2^{x-1}} \leq \sum_{n=2}^N \frac{1}{n^x} \leq \frac{1}{(1-x)N^{x-1}} + \frac{1}{x-1}$$

is OAC.

Exercice 8: (la fonction zêta de Riemann)

Soit $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$

1. la fonction ζ est définie $\Leftrightarrow \sum \frac{1}{n^x}$ converge

$\Rightarrow x > 1$ d'après le critère de ~~d'Alembert~~ Riemann

Ainsi l'ensemble de définition de la fonction ζ est $]1, +\infty[$

• Exercice 8:

le réel

1) la série $\sum 1/n^x$ converge si $x > 1$ α
donc $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^x$ existe ~~q~~ si $x > 1$, α
ie ζ est définie sur $]1, +\infty[$.

↑
la fonction

Exercice 5:

Soit $x \in]0; \pi[$

$$|f_n(x)| \leq |\cos^{n-1}(x)| < 1 \text{ car } x \neq 0[\pi]$$

Donc ~~$\sum |f_n(x)|$~~ ~~$\neq \sum |\cos(x)|^{n-1}$~~ et donc par comparaison de
séries à terme général positif, $\sum |f_n(x)|$ converge car $(|\cos(x)|^{n-1})_{n \in \mathbb{N}}$
est une suite géométrique de raison $|\cos(x)| < 1$ donc sa série converge

Exercice 8

α

1) la fonction ζ existe ssi $\sum \frac{1}{n^x}$ converge
ssi $x > 1$

Donc le domaine de définition de ζ est
l'intervalle $I =]1; +\infty[$

$$\begin{aligned}
 \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n}} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-t^2)^n \quad \text{car} \quad \text{on } \cancel{\text{suppose}} \quad (-t^2) \neq 1 \\
 &= \frac{1 - (-t^2)^{n+1}}{1 - (-t^2)} \\
 &= \boxed{\frac{1 - (-1)^{n+1} t^{2n+2}}{1 + t^2}}
 \end{aligned}$$

D'après l'inégalité triangulaire,

$$\frac{1}{|n^a + (-1)^n|} \geq \frac{1}{n^a + 1}$$

D'après

On remarque que

$$\frac{1}{|n^a + (-1)^n|} \sim \frac{1}{n^a} \text{ as } n \rightarrow \infty$$

$$\frac{1}{n^a} \text{ pour } a > 0.$$

D'où

la série $\sum \frac{(-1)^n}{n^a + (-1)^n}$ CV absolument pour $a > 1$

qui ne change pas de signe

si
si

$$= \int_0^1 \frac{1 - (-x)^{n+1}}{1+x} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx - \int_0^1 (-x)^{n+1} dx$$

$$= \ln(2) - \int_0^1 (-x)^{n+1} dx$$

$$= \ln(2) - \int_0^1 (-x)^{n+1} dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ln(2)$$

Q. 31

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \ln(2)$$

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^{n+1} dx \neq \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 (-x)^{n+1} dx$$

$$\int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} (-x)^{n+1} dx \neq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 (-x)^{n+1} dx$$

~~Yes~~ $\forall t \in]0,1[, (-t)^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

le réel

$\sqrt{x}$
Donc ξ est défini $\Leftrightarrow x > 1$

α Car $\frac{n}{a^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ Par croissance comparée

Or la série $\sum \frac{1}{a^n}$ cv comme série géométrique de raison $q < 1$

Donc par comparaison de séries à termes généraux positifs la série $\sum \frac{a^n}{n+a^n}$ cv

Réduc

~~lorsque~~ $a > 1$

ssi
/ si

Ex 8:

Leid

ssi

1) Pour que la fonction $\zeta(x)$ existe il faut que la série $\sum \frac{1}{n^x}$ C.V. on elle C.V. ssi $x > 1$
donc la fonction ζ est définie sur $I =]1, +\infty[$

2) Soit $x, y \in I$, tq $x < y$ donc $\frac{1}{n^x} > \frac{1}{n^y}$, $\forall n > \frac{1}{x-y}$
donc $\zeta(x) > \zeta(y)$ donc la fonction ζ est décroissante

$$2. \sum \frac{1}{n \cdot n^{\frac{1}{2}}} = \sum \frac{1}{n^{1+\frac{1}{2}}}$$

Ici $1 + \frac{1}{2} \neq 1$

D'après le critère de Riemann, la série $\sum \frac{1}{n \cdot n^{\frac{1}{2}}}$ converge car $1 + \frac{1}{n} > 1$



$\alpha = \frac{1}{2}$

~~amqp~~

$$0 \leq \frac{1}{(4m+1)(4m+3)} \sim \frac{1}{16m^2}$$

Donc la série $\sum \frac{1}{(4m+1)(4m+3)}$ converge.

$$u_n \sim v_n, \quad \frac{d u_n}{d x} \sim \frac{d v_n}{d x} \quad \ln(u_n) \sim \ln(v_n), \quad e^{u_n} \sim e^{v_n}$$

$$n! \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

$$\text{et } n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

α

~~D'au~~

$$\ln(n!) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln\left(\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\right)$$

$$n \sim n+1 \quad (n \rightarrow \infty)$$

$$\frac{e^{n+1}}{e^n} = e \rightarrow 1$$

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln n} \rightarrow 1$$

car...

Exercice 3

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\frac{1}{n(n+1)(2n+1)} = \frac{1}{2n^3 + 3n^2 + n} \sim \frac{1}{2n^3} \neq \frac{1}{n^3}$$

$$\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n^3}$$

Or la série $\sum \frac{1}{n^3}$ converge (série de Riemann)

Et deux séries à terme général positif équivalent sont de même nature.

Donc la série $\sum \frac{1}{n(n+1)(2n+1)}$ converge.

α 3) $\cancel{\left(\frac{n}{n+1}\right)^n} = \cancel{\sum} e^{n \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)} = \cancel{\sum} e^{n \ln\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)}$
 $= \cancel{\sum} e^{-\ln\left((1+\frac{1}{n})^n\right)}$

On $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e$ donc $e^{-\ln\left((1+\frac{1}{n})^n\right)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{e} \neq 0$

d'où $\sum \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ diverge grossièrement

① 1. $\sin\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$. On, $\sum \frac{1}{n}$ est divergente (série harmonique)
Par équivalence de séries à termes général positif, $\sum \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ DV.

Rédac.

Des séries ne peuvent pas être ~

$$* \quad H_n \sim \ln n + \gamma + \frac{1}{2n}$$

$$H_{2n+1} \sim \ln(2n+1) + \gamma + o(1)$$

$$2) \quad 3 + 4H_n - 4H_{2n+1} + \frac{1}{n+1} \sim 3 + 4P(n) + 4\gamma - 4\gamma - 4P(2n+1) + \frac{1}{n+1}$$

$$\text{can } \begin{cases} 4H_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} 4P(n) + 4\gamma \\ 4H_{2n+1} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} 4\gamma + 4P(2n+1) \end{cases}$$

$$\sigma(1) - \sigma(1)$$

$$= \sigma(1)$$

** On ne somme pas les ~.

idée [On la série $\sum O(\frac{1}{n^2})$ converge absolument
~~par comparaison de série à terme général positif.~~
car $\frac{1}{n^2}$ ne change pas de signe

$$e^{-\sqrt{n}}$$

Hyp. Donc $\frac{1}{n} = o(e^{-\sqrt{n}})$ et $\sqrt{n}$ ne change pas de signe

Or la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge, donc la série $\sum e^{-\sqrt{n}}$ diverge aussi.

Ce n'est pas le σ qui ne change pas de signe

On suppose $a = -1$

D'après le théorème des séries alternées, la série $\sum u_n$ converge

Hyp ?

car ... tend
vers 0 en $1/n$.

Cas 4:

Non

6) D'après la question 4, $\frac{n}{I_{n-1}} \leq \frac{I_n}{I_{n-1}} \leq 1$
~~comme les inégalités larges mènent à la limite~~ $1 \leq \frac{I_n}{I_{n-1}} \leq 1$
Donc $I_n \sim I_{n-1}$

D'ap. le th. de Landau