

CORRIGÉ DU KDO DU 8/09/2026

1. (a) Soit $n \geq 2$. On intègre par parties car les fonctions $u : \theta \mapsto (\sin \theta)^{n-1}$ et $v : \theta \mapsto -\cos \theta$ sont de classe $\mathcal{C}^1$: $I_n = \int_0^{\pi/2} uv' = [uv] - \int_0^{\pi/2} u'v$. $u(\theta) = (\sin \theta)^{n-1}$ et $v(\theta) = -\cos \theta$. D'où

$$I_n = [-(\sin \theta)^{n-1} \cos \theta]_0^{\pi/2} + (n-1) \int_0^{\pi/2} (\sin \theta)^{n-2} (\cos \theta)^2 d\theta. \text{ Or le terme entre crochets est nul.}$$

Donc
$$I_n = (n-1) \int_0^{\pi/2} (\sin \theta)^{n-2} (\cos \theta)^2 d\theta$$

- (b) Soit $n \geq 2$: $I_{n-2} - I_n = \int_0^{\pi/2} (\sin \theta)^{n-2} d\theta - \int_0^{\pi/2} (\sin \theta)^n d\theta = \int_0^{\pi/2} (\sin \theta)^{n-2} (1 - \sin^2 \theta) d\theta = \int_0^{\pi/2} (\sin \theta)^{n-2} (\cos \theta)^2 d\theta$.

D'où $I_{n-2} - I_n = \frac{1}{n-1} I_n$, donc
$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \text{ pour tout } n \geq 2.$$

- (c) Pour tout $\theta \in [0, \pi/2]$, $0 \leq \sin \theta \leq 1$. Doù $0 \leq \sin^n \theta \leq \sin^{n-1} \theta$. Par croissance de l'intégrale,

$0 \leq I_n \leq I_{n-1}$. Donc la suite (I_n) est décroissante

- (d) La suite (I_n) est décroissante, d'où $I_{n+1} \leq I_n \leq I_{n-1}$. D'où

$$\frac{n}{n+1} = \frac{I_{n+1}}{I_{n-1}} \leq \frac{I_n}{I_{n-1}} \leq 1 \text{ en}$$

divisant par I_{n-1} qui strictement positif car :

- pour tout $\theta \in [0, \pi/2]$, $(\sin \theta)^{n-1} \geq 0$, d'où $I_{n-1} \geq 0$;
- par l'aburde, $I_{n-1} \neq 0$: supposons que $I_{n-1} = 0$. Or La fonction $\theta \mapsto (\sin \theta)^{n-1}$ est continue et ne change pas de signe sur $[0, \pi/2]$, d'où elle est nulle sur $[0, \pi/2]$ d'après le théorème de l'intégrale nulle. C'est absurde car $(\sin \frac{\pi}{2})^{n-1} = 1 \neq 0$.

- (e) $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$, d'où $n I_n I_{n-1} = (n-1) I_{n-1} I_{n-2}$. Donc la suite $(n I_n I_{n-1})$ est constante. Et cette constante est égale à $I_1 I_0$. Or $I_0 = \int_0^{\pi/2} d\theta = \pi/2$ et $I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta = 1$. Donc

la suite $(n I_n I_{n-1})$ est constamment égale à $\frac{\pi}{2}$

- (f) De l'encadrement **1d**, on tire que $\frac{I_n}{I_{n-1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ grâce au théorème des gendarmes. D'où $I_n \sim I_{n-1}$.
La suite $(nI_n I_{n-1})$ est donc constante, égale à $\frac{\pi}{2}$ et équivalente à nI_n^2 . D'où $nI_n^2 \sim \frac{\pi}{2}$. Donc

$$\boxed{I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}} \text{ car la suite } (I_n) \text{ est positive.}$$

- (g) Soit $k \in \mathbb{N}$: $I_{2k} = \frac{2k-1}{2k} I_{2k-2} = \frac{2k-1}{2k} \frac{2k-3}{2k-2} I_{k-2} = \dots = \frac{(2k-1)(2k-3)\dots 1}{(2k)(2k-2)\dots 2} I_0 =$

$$\frac{(2k)!}{[(2k)(2k-2)\dots 2]^2} \frac{\pi}{2}. \text{ Donc } \boxed{I_{2k} = \frac{(2k)!}{4^k (k!)^2} \cdot \frac{\pi}{2}} \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}.$$

- (h) D'après l'équivalent **1f**, $I_{2k} \sim \sqrt{\frac{\pi}{4k}}$, d'où $\boxed{\frac{(2k)!}{k!^2} \sim \frac{4^k}{\sqrt{k\pi}}}$ en utilisant l'égalité **1g**.

2. (a) La première formule est une réécriture de $\sim$ avec un o :

$$\ln(n!) \sim n \ln n \iff \ln(n!) = n \ln n + o(n \ln n).$$

Or $\ln(n!) = \sum_{k=1}^n \ln(k)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, d'où l'équivalent en comparant la série $\sum \ln(n)$ et l'intégrale $\int \ln(x) dx$.

- (b) On cherche un équivalent de $u_n = \ln(n!) - n \ln n$ en étudiant la série télescopique $\sum (u_n - u_{n-1})$:

$$u_n - u_{n-1} = \ln n - n \ln n + (n-1) \ln(n-1) = (n-1) \ln \left(1 - \frac{1}{n}\right) \sim -1 \text{ qui ne change pas de signe.}$$

Or la série $\sum (-1)$ diverge, d'où la série $\sum (u_n - u_{n-1})$ diverge aussi et leurs sommes partielles sont équivalentes :

$$\sum_{k=2}^n (u_k - u_{k-1}) = \ln(n!) - n \ln n \sim \sum_{k=2}^n (-1) = -n + 1 \sim -n.$$

Donc $\boxed{\ln(n!) = n \ln n - n + o(n)}$

- (c) On cherche un équivalent de $u_n = \ln(n!) - n \ln n + n$ en étudiant la série $\sum (u_n - u_{n-1})$:

$$u_n - u_{n-1} = (n-1) \ln \left(1 - \frac{1}{n}\right) + 1 = \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{2n} \text{ qui ne change pas de signe.}$$

Or la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge, d'où la série $\sum (u_n - u_{n-1})$ diverge aussi et leurs sommes partielles sont équivalentes :

$$\sum_{k=2}^n (u_k - u_{k-1}) = \ln(n!) - n \ln n + n - 1 \sim \sum_{k=2}^n \frac{1}{2k} \sim \frac{1}{2} \ln n.$$

Donc

$$\ln(n!) = n \ln n - n + \frac{1}{2} \ln n + o(\ln n)$$

(d) On cherche un équivalent de $u_n = \ln(n!) - n \ln n + n - \frac{1}{2} \ln n$ en étudiant la série $\sum (u_n - u_{n-1})$:

$$u_n - u_{n-1} = \left(n - \frac{1}{2}\right) \ln \left(1 - \frac{1}{n}\right) + 1 = -\frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim -\frac{1}{12n^2}.$$

Or la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, d'où la série $\sum (u_n - u_{n-1})$ converge aussi, donc la suite u_n converge.

Soit K sa limite. Alors

$$\ln(n!) = n \ln n - n + \frac{1}{2} \ln n + K + o(1)$$

3. On calcule l'exponentielle de la formule obtenue à la question précédente :

$$n! = n^n e^{-n} \sqrt{n} e^K \exp[o(1)] \sim n^n e^{-n} \sqrt{n} e^K.$$

D'où l'on tire l'équivalent $\frac{(2n)!}{n!^2} \sim \frac{(2n)^{2n} e^{-2n} \sqrt{2n} e^K}{(n^n e^{-n} \sqrt{n} e^K)^2} \sim \frac{4^n \sqrt{2}}{\sqrt{n} e^K}$, à comparer avec l'équivalent obtenu à

la question 1h : $\frac{(2n)!}{n!^2} \sim \frac{4^n}{\sqrt{n\pi}}$.

Donc $e^K = \sqrt{2\pi}$ et

$$n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$$