

CORRIGÉ DU D.S. N° 1 DE MATHÉMATIQUES

EXERCICE 1

- 1) La fonction f est dérivable et, pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - 1 \cdot \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$.

x	0	e	$+\infty$
$y'(t)$		+	0
y		$\nearrow$	$\searrow$
	$-\infty$	1/e	0

- 2) La série $\sum \frac{\ln n}{n}$ est divergente car $\sum \frac{1}{n}$ diverge et $\forall n \geq 3$, $\frac{\ln n}{n} \geq \frac{1}{n} \geq 0$. La suite $(\frac{\ln n}{n})$:
 — est décroissante à partir du rang 3 car la fonction f est décroissante sur $[e, +\infty[$ d'après la q. 1 ;
 — tend vers 0 d'après les croissances comparées.

Donc la série $\sum (-1)^n \frac{\ln n}{n}$ est convergente d'après le théorème des séries alternées.

- 3) Soit $n \geq 3$. La fonction f est continue et décroissante sur $[3, +\infty[$ d'après la q. 1, d'où, pour tout $x \in [n, n+1]$, $\frac{\ln(n+1)}{n+1} \leq \frac{\ln x}{x} \leq \frac{\ln n}{n}$.

Par croissance de l'intégrale, $\int_n^{n+1} \frac{\ln(n+1)}{n+1} dx \leq \int_n^{n+1} \frac{\ln x}{x} dx \leq \int_n^{n+1} \frac{\ln n}{n} dx$.

Donc $\frac{\ln(n+1)}{n+1} \leq \frac{1}{2}(\ln(n+1))^2 - \frac{1}{2}(\ln n)^2 \leq \frac{\ln n}{n}$.

- 4) La fonction f est continue et décroissante sur $[3, +\infty[$, d'où

$$\int_3^{n+1} \frac{\ln x}{x} dx \leq \sum_{k=3}^n \frac{\ln k}{k} \quad \text{et} \quad \sum_{k=4}^n \frac{\ln k}{k} \leq \int_3^n \frac{\ln x}{x} dx,$$

pour tout n supérieur ou égal à 3. D'où

$$\int_3^{n+1} \frac{\ln x}{x} dx \leq S_n \leq \frac{\ln 3}{3} + \int_3^n \frac{\ln x}{x} dx.$$

Donc

$$\frac{(\ln(n+1))^2}{2} - \frac{(\ln 3)^2}{2} \leq S_n \leq \frac{\ln 3}{3} + \frac{(\ln n)^2}{2} - \frac{(\ln 3)^2}{2}.$$

En divisant chaque membre par $\frac{1}{2}(\ln n)^2$, on obtient deux gendarmes qui tendent vers 1.

D'où $\frac{S_n}{\frac{1}{2}(\ln n)^2} \longrightarrow 1$. Donc

$$S_n \sim \frac{1}{2}(\ln n)^2.$$

5) Première méthode (théorème de la limite monotone) : La suite (u_n) est décroissante car

$$u_{n+1} - u_n = S_{n+1} - S_n - \frac{1}{2}(\ln(n+1))^2 + \frac{1}{2}(\ln n)^2 = \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \frac{1}{2}(\ln(n+1))^2 + \frac{1}{2}(\ln n)^2$$

qui est négatif d'après la q. 3. Elle est minorée car $S_n \geq \frac{(\ln(n+1))^2}{2} - \frac{(\ln 3)^2}{2}$ d'après la q. 4, d'où

$$u_n \geq \frac{(\ln(n+1))^2}{2} - \frac{(\ln 3)^2}{2} - \frac{(\ln n)^2}{2} \geq -\frac{(\ln 3)^2}{2}$$

et cette constante est donc un minorant.

La suite (u_n) est décroissante et minorée, donc convergente.

Seconde méthode (série télescopique) :

La suite (u_n) a la même nature que la série télescopique $\sum (u_n - u_{n-1})$.

Or $u_n - u_{n-1} = \frac{\ln(n)}{n} - \frac{1}{2}(\ln(n))^2 + \frac{1}{2}(\ln(n-1))^2$ et

$$(\ln(n-1))^2 = \left(\ln n + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \right)^2 = (\ln n)^2 - 2\frac{\ln n}{n} + \frac{\ln n}{n^2} + o\left(\frac{\ln n}{n^2}\right).$$

D'où $u_n - u_{n-1} \sim \frac{-\ln n}{2n^2}$ qui ne change pas de signe. De plus la série $\sum \frac{\ln n}{n^2}$ converge. Donc

la suite (u_n) converge.

6) $T_{2n} = \sum_{k=2}^{2n} (-1)^k \frac{\ln k}{k} = \sum_{p=1}^n \frac{\ln 2p}{2p} - \sum_{p=1}^n \frac{\ln(2p-1)}{2p-1}$, en séparant les indices pairs et impairs. D'où

$$T_{2n} = 2 \times \sum_{p=1}^n \frac{\ln 2 + \ln p}{2p} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k} = \ln 2 \cdot \sum_{p=1}^n \frac{1}{p} + \sum_{p=1}^n \frac{\ln p}{p} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k} = \ln 2 \cdot \sum_{p=1}^n \frac{1}{p} + \sum_{p=3}^n \frac{\ln p}{p} - \sum_{k=3}^{2n} \frac{\ln(k)}{k}.$$

Donc $T_{2n} = H_n \cdot \ln 2 + S_n - S_{2n}.$

7) $H_n - \ln n$ tend vers γ , d'où $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$. D'après la q. 5, il existe une contante K telle que $S_n = \frac{1}{2}(\ln n)^2 + K + o(1)$. Par suite, $S_{2n} = \frac{1}{2}(\ln(2n))^2 + K + o(1)$ et $T_{2n} = H_n \cdot \ln 2 + S_n - S_{2n} = [\ln n + \gamma + o(1)] \cdot \ln 2 + \left[\frac{1}{2}(\ln n)^2 + K + o(1) \right] - \left[\frac{1}{2}(\ln(2n))^2 + K + o(1) \right] = \gamma \ln 2 - \frac{1}{2}(\ln 2)^2 + o(1).$

Donc $T_{2n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \gamma \cdot \ln 2 - \frac{1}{2} \cdot (\ln 2)^2.$

PROBLÈME (VITESSE DE CONVERGENCE, EXTRAIT DE CENTRALE PC 2017 MATH 2)

- 1) a) La suite (u_n) définie par $u_{2k} = u_{2k+1} = \frac{1}{k!}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, est dans E (puisqu'elle converge vers $\ell = 0$ et ne vaut jamais 0), mais pas dans E^c . En effet, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n^c = \frac{u_{n+1}}{u_n} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 2k \\ \frac{1}{k+1} & \text{si } n = 2k+1 \end{cases}$$

Donc $\lim_{k \rightarrow +\infty} u_{2k}^c = 1 \neq 0 = \lim_{k \rightarrow +\infty} u_{2k+1}^c$, ce qui montre que la suite (u_n^c) diverge.

L'ensemble E^c est donc strictement inclus dans E .

- b) La preuve qui suit s'inspire de celle du critère de d'Alembert [▷ preuve du théorème 10 du chapitre I](#). Comme $(u_n) \in E^c$, on a $\ell^c \geq 0$ (en tant que limite d'une suite à termes positifs). Supposons, par l'absurde, que $\ell^c > 1$. Alors, en notant $v_n = |u_n - \ell|$:

$$\exists \lambda > 1, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \quad \frac{v_{n+1}}{v_n} \geq \lambda$$

D'où, pour tout $n > N$, $v_n = v_N \times \frac{v_{N+1}}{v_N} \times \dots \times \frac{v_n}{v_{n-1}} \geq v_N \times \lambda^{n-N}$

Comme $v_N > 0$ et $\lambda^{n-N} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$, on en déduit que $v_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$ par comparaison, ce qui est contradictoire avec la convergence de (u_n) vers ℓ . L'hypothèse est donc absurde et

ℓ^c appartient au segment $[0, 1]$.

- 2) a) • La suite $(u_n) = \left(\frac{1}{(n+1)^k}\right)$ converge vers $\ell = 0$ et ne vaut jamais 0, donc $(u_n) \in E$. De plus,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n^c = \frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^k \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1$$

Donc (u_n) appartient à E^c , avec $\ell^c = 1$, et la convergence est lente.

- La suite $(v_n) = (n^k q^n)$ converge vers $\ell = 0$ (par croissances comparées) et ne vaut jamais 0 pour $n \geq 1$, donc $(v_n) \in E$. De plus,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n^c = \frac{v_{n+1}}{v_n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^k q \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} q$$

Donc (v_n) appartient à E^c , avec $\ell^c = q \in]0, 1[$, et la convergence est géométrique de rapport q .

- La suite $(w_n) = \left(\frac{1}{n!}\right)$ converge vers $\ell = 0$ et ne vaut jamais 0, donc $(w_n) \in E$. De plus,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n^c = \frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

Donc (w_n) appartient à E^c , avec $\ell^c = 0$, et la convergence est rapide.

- b) i) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = e^{2^n \ln(1+2^{-n})}$, et comme $2^{-n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$, on peut écrire, au voisinage de ∞ :

$$v_n = e^{2^n(2^{-n} - \frac{1}{2}(2^{-n})^2 + o((2^{-n})^2))} = e \times e^{-2^{-n-1} + o(2^{-n})} = e \times (1 - 2^{-n-1} + o(2^{-n}))$$

Par conséquent,

$$\text{au voisinage de } \infty, v_n = e - \frac{e}{2^{n+1}} + o\left(\frac{1}{2^n}\right).$$

- ii) La suite (v_n) converge vers $\ell = e$ et $v_n - e \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{e}{2^{n+1}} < 0$, donc $v_n < e$ à partir d'un certain rang. Ceci montre que $(v_n) \in E$. De plus,

$$v_n^c = \frac{|v_{n+1} - e|}{|v_n - e|} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{e/2^{n+2}}{e/2^{n+1}} = \frac{1}{2}$$

Donc

la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ appartient à E^c et sa vitesse de convergence est géométrique de rapport $\frac{1}{2}$.

- c) i) Cela résulte d'une comparaison série-intégrale : comme la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est continue et décroissante sur $[1, +\infty[$, on a :

$$\forall k \geq 2, \quad \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^k \frac{dt}{t^\alpha}$$

En sommant pour k variant de $n+1$ à $N > n$, on obtient :

$$\forall (n, N) \in \mathbb{N}^2, \quad N > n \geq 1, \quad \int_{n+1}^{N+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \sum_{k=n+1}^N \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_n^N \frac{dt}{t^\alpha}$$

L'encadrement précédent s'écrit :

$$\frac{(N+1)^{1-\alpha} - (n+1)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \leq \sum_{k=n+1}^N \frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{N^{1-\alpha} - n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

Les inégalités larges passent à la limite, donc, en faisant tendre N vers ∞ , on obtient (puisque $1-\alpha < 0$) l'encadrement :

$$\frac{-(n+1)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{-n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

C'est-à-dire

$$\frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \leq \ell - S_n \leq \frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{n^{\alpha-1}}.$$

- ii) La suite (S_n) est strictement croissante et converge vers ℓ , donc $S_n < \ell$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui montre que $(S_n) \in E$. De plus, $S_n^c = \frac{\ell - S_{n+1}}{\ell - S_n}$, donc, en utilisant les inégalités précédentes :

$$\frac{n^{\alpha-1}}{(n+2)^{\alpha-1}} \leq S_n^c \leq 1$$

D'après le théorème des gendarmes, $S_n^c \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1$.

Par conséquent

(S_n) appartient à E^c et possède une vitesse de convergence lente.

- 3) a) Puisque $(u_n) \in E$ et que la vitesse de convergence de (u_n) est d'ordre $r > 1$, il existe une constante $M > 0$ et un entier n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, $\frac{|u_{n+1}-\ell|}{|u_n-\ell|^r} \leq M$. On a donc, en multipliant cette inégalité par $|u_n - \ell|^{r-1}$:

$$\forall n \geq n_0, \quad \left| \frac{u_{n+1} - \ell}{u_n - \ell} \right| \leq M |u_n - \ell|^{r-1}$$

Comme $r - 1 > 0$ et que $u_n - \ell \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$, on obtient, par le théorème des gendarmes, $\left| \frac{u_{n+1} - \ell}{u_n - \ell} \right| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$,

ce qui montre que

la convergence de la suite (u_n) est rapide

- b) Soit $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$.

- i) La suite $(\frac{1}{n!})_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement positive et $\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 < 1$. D'après la règle de

d'Alembert, la série $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!}$ est donc convergente, ce qui signifie que

la suite (S_n) converge

On note s sa limite.

Comme la suite (S_n) est strictement croissante, $S_n < s$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Ceci montre que

la suite (S_n) appartient à E

- ii) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $s - S_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!}$.

- Comme il s'agit d'une somme de termes positifs, elle est supérieure à son premier terme, ce qui donne l'inégalité $s - S_n \geq \frac{1}{(n+1)!}$
- De plus, en factorisant par $\frac{1}{(n+1)!}$, on a :

$$s - S_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1+k)!} = \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\prod_{j=2}^{k+1} (n+j)}$$

Or, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\prod_{j=2}^{k+1} (n+j) \geq \prod_{j=2}^{k+1} 2 = 2^k$, donc $s - S_n \leq \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}$.

Donc

pour tout entier naturel n , $\frac{1}{(n+1)!} \leq s - S_n \leq \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}$

- iii) Comme la série géométrique $\sum \frac{1}{2^k}$ converge et a pour somme $\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$, l'encadrement précédent s'écrit $\frac{1}{(n+1)!} \leq s - S_n \leq \frac{2}{(n+1)!}$. Par conséquent :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left| \frac{S_{n+1} - s}{S_n - s} \right| \leq \frac{2}{n+2}$$

D'après le théorème des gendarmes, $\left| \frac{S_{n+1} - s}{S_n - s} \right| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$, ce qui démontre que

la convergence de la suite (S_n) est rapide

- iv) Supposons, par l'absurde, que la convergence de la suite (S_n) soit d'ordre $r > 1$. Il existe alors une constante $M > 0$ et un entier naturel n_0 tels que :

$$\forall n \geq n_0, \quad |S_{n+1} - s| \leq M|S_n - s|^r$$

Les encadrements précédemment établis impliquent :

$$\frac{1}{(n+2)!} \leq |S_{n+1} - s| \leq M|S_n - s|^r \leq M \frac{2^r}{((n+1)!)^r}$$

Et donc, pour tout $n \geq n_0$, $((n+1)!)^{r-1} \leq M2^r(n+2)$. Mais ceci est impossible, puisque $n+2$ est négligeable devant $((n+1)!)^{r-1}$ (vu que $r-1 > 0$).

Par conséquent, l'hypothèse est absurde et

la convergence de la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers s n'est pas d'ordre r .

- c) i) Comme $f(I) \subset I$, la suite (u_n) est bien définie. La fonction f étant dérivable en $\ell \in I$, elle y est continue. Par conséquent, la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(\ell)$.

Comme la suite (u_{n+1}) converge aussi vers ℓ , on obtient $f(\ell) = \ell$, par unicité de la limite.

- ii) Supposons, par l'absurde, qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} = \ell$. Comme $f(\ell) = \ell$, une récurrence montre que, pour tout $n \geq n_0$, $u_n = \ell$, c'est-à-dire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est stationnaire, ce qui est absurde. Par conséquent, la suite (u_n) est dans E .

De plus, f étant dérivable en ℓ et la fonction $t \mapsto |t|$ étant continue en $f'(\ell)$, on a :

$$\left| \frac{u_{n+1} - \ell}{u_n - \ell} \right| = \left| \frac{f(u_n) - f(\ell)}{u_n - \ell} \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} |f'(\ell)|$$

Ceci montre que :

la suite (u_n) appartient à E^c et que sa vitesse de convergence est donnée par $\ell^c = |f'(\ell)|$.

- iii) Par l'absurde, supposons (u_n) non stationnaire. Alors, d'après la question précédente, la suite (u_n) est dans E^c et $\ell^c = |f'(\ell)| > 1$, ce qui contredit le résultat de la question 1b.

Par conséquent, la suite (u_n) est nécessairement stationnaire.

- iv) Comme on suppose ici (u_n) non stationnaire, la suite (u_n) est dans E d'après la question 3(c)ii et le quotient $\frac{|u_{n+1} - \ell|}{|u_n - \ell|^r} = \frac{|f(u_n) - f(\ell)|}{|u_n - \ell|^r}$ est alors bien défini.

- Supposons que, pour tout $k \in \llbracket 1, r-1 \rrbracket$, $f^{(k)}(\ell) = 0$. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^r$ sur I , elle admet alors un développement limité à l'ordre r en ℓ d'après le théorème de Taylor-Young et on a, comme $u_n - \ell \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$:

$$\frac{|u_{n+1} - \ell|}{|u_n - \ell|^r} = \frac{|f(u_n) - f(\ell)|}{|u_n - \ell|^r} = \frac{\left| \frac{f^{(r)}(\ell)}{r!} (u_n - \ell)^r + o((u_n - \ell)^r) \right|}{|u_n - \ell|^r} = \left| \frac{f^{(r)}(\ell)}{r!} \right| + o(1) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f^{(r)}(\ell)}{r!} \right|$$

Étant convergente, la suite $\left(\frac{|u_{n+1} - \ell|}{|u_n - \ell|^r} \right)$ est bornée, donc la vitesse de convergence de (u_n) est d'ordre r .

- Supposons le contraire, c'est-à-dire que l'ensemble $\{k \in \llbracket 1, r-1 \rrbracket, f^{(k)}(\ell) \neq 0\}$ est une partie finie non vide de $\mathbb{N}$. Elle admet alors un minimum j et on a :

$$\frac{|u_{n+1} - \ell|}{|u_n - \ell|^r} = \frac{|f(u_n) - f(\ell)|}{|u_n - \ell|^r} = \frac{\left| \frac{f^{(j)}(\ell)}{j!} (u_n - \ell)^j + o((u_n - \ell)^j) \right|}{|u_n - \ell|^r} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\left| \frac{f^{(j)}(\ell)}{j!} \right|}{|u_n - \ell|^{r-j}}$$

Comme $r - j > 0$ et $f^{(j)}(\ell) \neq 0$, on a $\frac{|u_{n+1} - \ell|}{|u_n - \ell|^r} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \infty$, et donc la vitesse de convergence de (u_n) n'est pas d'ordre r .

Finalement,

la vitesse de convergence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est d'ordre r si, et seulement si, $\forall k \in \llbracket 1, r-1 \rrbracket, f^{(k)}(\ell) = 0$.

EXERCICE 2 (EXTRAIT DE CENTRALE PSI 2009 MATH 1)

- 1)
 - a) On suppose que (a_n) est une suite réelle qui vérifie (P_1) : si (u_n) est une suite pour laquelle la série $\sum u_n$ converge, alors la suite (u_n) est bornée, car convergente (elle tend vers 0). D'après l'hypothèse, la série $\sum a_n u_n$ converge. On en déduit que la suite (a_n) vérifie (P_2) .
 - b) On suppose que (a_n) est une suite complexe telle que la série $\sum a_n$ converge absolument. Soit (u_n) une suite bornée et M un majorant des $|u_n|$. On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n u_n| \leq M|a_n|$. La convergence absolue de la série $\sum a_n$ entraîne la convergence de $\sum |a_n u_n|$ donc aussi celle de $\sum a_n u_n$ et, par conséquent, la suite (a_n) vérifie (P_1) .
- 2) Dans cette question, $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ pour tout $n \geq 1$.
 - a) En posant $u_n = (-1)^n$, on obtient une suite bornée. De plus, $\sum a_n u_n$ est la série $\sum \frac{1}{n}$, or cette série diverge. Donc la suite (a_n) ne vérifie pas (P_1) .
 - b) Posons, pour tout $n \geq 2$, $S_n = \sum_{k=2}^n \frac{\ln k}{k}$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t \ln t}$ est continue et décroissante sur $[2; +\infty[$, d'où

$$\ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln 2) = \int_2^{n+1} \frac{1}{t \ln t} dt \leq \sum_{k=2}^n \frac{\ln k}{k}$$

en comparant série et intégrale. Or $\ln(\ln(n+1))$ tend vers $+\infty$, d'où S_n tend vers $+\infty$, donc la série $\sum \frac{1}{n \ln n}$ diverge.

- c) Posons $u_0 = u_1 = 0$ et, pour tout $n \geq 2$, $u_n = \frac{(-1)^n}{\ln n}$. D'après le théorème des séries alternées, la série $\sum u_n$ converge car la suite $(\frac{1}{\ln n})_{n \geq 2}$ tend vers zéro en décroissant. Or $\sum a_n u_n$ est la série $\sum \frac{1}{n \ln n}$ qui diverge. Donc la suite (a_n) ne vérifie pas (P_2) .
- 3)
 - a) La convergence de la série $\sum |a_{n+1} - a_n|$ entraîne celle de $\sum (a_{n+1} - a_n)$ car la convergence absolue entraîne la convergence. On en déduit (par télescopage) que la suite (a_n) converge.
 - b) En posant $U_{-1} = 0$, on peut écrire :

$$\sum_{n=0}^N a_n u_n = \sum_{n=0}^N a_n (U_n - U_{n-1}) = \sum_{n=0}^N a_n U_n - \sum_{n=0}^N a_n U_{n-1}.$$

On opère le changement d'indice $k = n - 1$ dans la seconde somme et on regroupe les termes de même indice pour obtenir :

$$\sum_{n=0}^N a_n u_n = a_N U_N + \sum_{n=0}^{N-1} (a_n - a_{n+1}) U_n + a_0 U_{-1} = a_N U_N + \sum_{n=0}^{N-1} (a_n - a_{n+1}) U_n.$$

- c) Supposons que la série $\sum u_n$ converge, alors la suite (U_n) converge, donc elle est bornée. Comme la série $\sum (a_n - a_{n+1})$ converge absolument, la question 1b indique que la série $\sum (a_n - a_{n+1}) U_n$ converge. De plus, $(a_n U_n)$ est une suite convergente (car c'est, d'après la question 3a, le produit de deux suites convergentes). L'égalité de la question 3b prouve alors que la série $\sum a_n u_n$ converge. On a prouvé la propriété (P_2) pour la suite (a_n) .
- 4)
 - a) Posons $u_n = \frac{|a_n|}{a_n}$ si $a_n \neq 0$ et $u_n = 1$ sinon. Dans les deux cas, $a_n u_n = |a_n|$. Ainsi la série $\sum a_n u_n$ diverge tandis que la suite (u_n) est bornée puisque formée de termes de module 1. La suite (a_n) ne vérifie donc pas (P_1) .
 - b) On a montré à la question 1b qu'une suite (a_n) telle que la série $\sum a_n$ converge absolument vérifie (P_1) . Et que, réciproquement, une suite (a_n) telle que la série $\sum a_n$ ne converge pas absolument, ne vérifie pas (P_1) . Finalement, les suites vérifiant (P_1) sont celles dont la série associée converge absolument.