

D.S. N° 1 DE MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures. Les calculatrices sont interdites.

Ce sujet comporte deux exercices et un problème.

On attachera un grand soin à la rédaction. En particulier, chaque résultat ou conclusion devra être encadré.

On peut toujours admettre les résultats des questions précédentes pour traiter les questions suivantes.

14

EXERCICE 1

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ et on admet que la suite $(H_n - \ln n)$ converge vers un réel noté γ .

On rappelle que $2 < e = \exp(1) < 3$.

0,5 1) Dresser le tableau des variations de la fonction

$$f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{\ln x}{x}.$$

3

2) Quelle est la nature des séries $\sum \frac{\ln n}{n}$ et $\sum (-1)^n \frac{\ln n}{n}$? $\frac{\ln n}{n} \geq \frac{1}{n}$ APCR on $\forall n$, 3 q's et $\frac{1}{n} \geq 0$ 0,5 $\frac{\ln n}{n}$ tend vers 0 en 1/3 0,5

0,5 3) Montrer que, pour tout $n \geq 3$,

APCR on à partir du rang 3 car 1

$$\frac{\ln(n+1)}{n+1} \leq \frac{1}{2}(\ln(n+1))^2 - \frac{1}{2}(\ln n)^2 \leq \frac{\ln n}{n}.$$

Soient, pour chaque n supérieur ou égal à 3,

$$S_n = \sum_{k=3}^n \frac{\ln k}{k} \quad \text{et} \quad u_n = S_n - \frac{1}{2}(\ln n)^2.$$

2

4) Déterminer un équivalent de S_n quand n tend vers ∞ .

Encadrement de S_n 1

Gendarmes 1

5) Montrer que la suite (u_n) est convergente, de deux manières :

2

a) en utilisant le théorème de la limite monotone;

$\rightarrow$ car 1 minorée car 1

3

b) en utilisant une série télescopique.

$u_{n+1} - u_n = \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \frac{1}{2}(\ln(n+1))^2 + \frac{1}{2}(\ln n)^2 = \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \frac{1}{2}(\ln(n+1) - \ln n)(\ln(n+1) + \ln n)$
 $\sim \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \frac{1}{2} \ln 2 \cdot \ln n$ 1,5 qui ne change pas de signe 0,5
 et $\sum \frac{\ln(n)}{n^2}$ cv car 1

Soit, pour chaque n supérieur ou égal à 3, $T_n = \sum_{k=2}^n (-1)^k \frac{\ln k}{k}$.

1

6) Montrer que, pour tout n supérieur ou égal à 3, $T_{2n} = H_n \cdot \ln 2 + S_n - S_{2n}$.

2

7) Montrer que la suite (T_{2n}) converge et déterminer sa limite.

$T_{2n} \rightarrow \gamma \ln 2 - \frac{1}{2}(\ln 2)^2$

PROBLÈME

Définitions et notations

- $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ désigne l'ensemble des suites définies sur $\mathbb{N}$ à valeurs réelles.
- E désigne le sous-ensemble de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ constitué des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergentes telles que

$$\exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall k \geq N, \quad u_k \neq \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$$

- À toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ appartenant à E et de limite égale à ℓ , on associe la suite (u_n^c) définie à partir d'un certain rang par

$$u_n^c = \left| \frac{u_{n+1} - \ell}{u_n - \ell} \right|$$

- E^c désigne l'ensemble des éléments $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E tels que la suite (u_n^c) soit convergente.
- Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite appartenant à E^c et soit ℓ^c la limite de la suite (u_n^c) ; on dit que la *vitesse de convergence* de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est :
 - *lente* si $\ell^c = 1$,
 - *géométrique* de rapport ℓ^c si $\ell^c \in]0, 1[$,
 - *rapide* si $\ell^c = 0$.
- Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite appartenant à E et de limite égale à ℓ , et soit r un réel strictement supérieur à 1; on dit que la vitesse de convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers ℓ est d'ordre r si la suite définie à partir d'un certain rang par $\frac{u_{n+1} - \ell}{|u_n - \ell|^r}$ est bornée.
- On rappelle qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est *stationnaire* lorsque : $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n = u_{n_0}$.

1) Des résultats généraux

- Montrer que E^c est strictement inclus dans E . (On pourra utiliser la suite définie par $u_{2k} = u_{2k+1} = \frac{1}{k!}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.)
- Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un élément de E^c . Montrer que ℓ^c appartient au segment $[0, 1]$.

2) Exemples de calcul de vitesse de convergence

- Soit k un entier strictement positif et q un réel appartenant à l'intervalle $]0, 1[$.
Montrer que les suites $\left(\frac{1}{(n+1)^k}\right)_{n \in \mathbb{N}}$, $(n^k q^n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $\left(\frac{1}{n!}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ appartiennent à E^c et donner leur vitesse de convergence. (On commencera par montrer qu'elles appartiennent à E .)
- On considère la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \left(1 + \frac{1}{2^n}\right)^{2^n}$.
 - Montrer qu'au voisinage de $+\infty$, $v_n = e - \frac{e}{2^{n+1}} + o\left(\frac{1}{2^n}\right)$.
 - Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ appartient à E . Montrer qu'elle appartient à E^c et donner sa vitesse de convergence.

- Soit α un réel strictement supérieur à 1.

On note ℓ la somme de la série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ et $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $S_0 = 0$ et

$$\forall n \geq 1, S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}.$$

- Montrer que :

$$\forall n \geq 1, \quad \frac{1}{\alpha - 1} \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \leq \ell - S_n \leq \frac{1}{\alpha - 1} \frac{1}{n^{\alpha-1}}$$

- Établir que $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ appartient à E , puis qu'elle appartient à E^c et donner sa vitesse de convergence.

16

3) Vitesse de convergence d'ordre r d'une suite réelle

2 a) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un élément de E dont la vitesse de convergence est d'ordre r , où r est un réel strictement supérieur à 1. Montrer que la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est rapide.

b) Soit $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$.

1 i) Montrer que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un élément de E . On note s la limite de cette suite.

2 ii) Montrer que, pour tout entier naturel n , on a

$$\frac{1}{(n+1)!} \leq s - S_n \leq \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k}$$

3 iii) En déduire que la convergence de la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est rapide. $\left| \frac{S_{n+1} - s}{S_n - s} \right| \leq \frac{2}{n+2}$

2 iv) Soit r un réel strictement supérieur à 1. Montrer que la convergence de la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers s n'est pas d'ordre r .

c) On considère I un intervalle réel de longueur strictement positive, f une application définie sur I à valeurs dans I et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite définie par $u_0 \in I$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$. On suppose que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un élément ℓ de I et que f est dérivable en ℓ .

1 i) Montrer que $f(\ell) = \ell$. f continue en ℓ car f dérivable en ℓ

2 ii) Montrer que, si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas stationnaire, alors elle appartient à E , et aussi à E^c . Donner sa vitesse de convergence en fonction de $f'(\ell)$.

1 iii) Montrer que, si $|f'(\ell)| > 1$, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est stationnaire.

2 iv) Soit r un entier supérieur ou égal à 2. On suppose que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^r$ sur I et que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas stationnaire.

Montrer que la vitesse de convergence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est d'ordre r si et seulement si

$$\forall k \in \llbracket 1, r-1 \rrbracket, f^{(k)}(\ell) = 0$$

14

EXERCICE 2

- On dira qu'une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs complexes vérifie la propriété (P_1) si, pour toute suite complexe $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bornée, la série $\sum a_n u_n$ converge.
- On dira qu'une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs réelles vérifie la propriété (P_2) si, pour toute suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, la convergence de la série $\sum u_n$ entraîne celle de la série $\sum a_n u_n$.

- 1) a) Montrer qu'une suite réelle vérifiant la propriété (P_1) vérifie la propriété (P_2) . **2**
 b) Montrer qu'une suite complexe $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que la série $\sum a_n$ converge absolument vérifie la propriété (P_1) . **2**
- 2) Dans cette question seulement, la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par $a_0 = 0$ et $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$, pour tout $n \geq 1$.
 a) La suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie-t-elle la propriété (P_1) ? **1**
 b) Quelle est la nature de la série $\sum \frac{1}{n \ln n}$? **2**
 c) La suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie-t-elle la propriété (P_2) ? **1**
- 3) Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle telle que la série $\sum |a_{n+1} - a_n|$ converge.
 a) Montrer que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ possède une limite finie. **1**
 b) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle telle que la série $\sum u_n$ converge. On note $U_n = \sum_{k=0}^n u_k$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Prouver, pour tout entier naturel $N \geq 1$, la relation :

$$\sum_{n=0}^N a_n u_n = \sum_{n=0}^{N-1} (a_n - a_{n+1}) U_n + a_N U_N \quad \text{0,5}$$

- c) En déduire que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie la propriété (P_2) . **2,5**
- 4) a) Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes telle que la série $\sum |a_n|$ diverge. Construire une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres complexes de module 1 telle que la série $\sum a_n u_n$ diverge. **1**
 b) En déduire une condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite complexe $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie (P_1) . **1**