

CORRIGÉ DU T.D. N° 2

Algèbre linéaire

15 septembre 2026

Exercice 1. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans une base (e_1, e_2, e_3) est donnée par

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer une base de $\text{Ker } f$ et de $\text{Im } f$.
2. Noyau et image sont-ils supplémentaires ?
3. Déterminer une matrice inversible P telle que

$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$xe_1 + ye_2 + ze_3 \in \text{Ker } f \iff \begin{cases} x & +y & -z & = & 0 \\ -3x & -3y & +3z & = & 0 \\ -2x & -2y & +2z & = & 0 \end{cases} \iff x = -y + z \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_u + z \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_v.$$

Donc $u = -e_1 + e_2$ et $v = e_1 + e_3$ forment une base de $\text{Ker } f$.

Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Le *sev* $\text{Im } f$ est engendré par les vecteurs $f(e_1) = e_1 - 3e_2 - 2e_3$, $f(e_2) = e_1 - 3e_2 - 2e_3$ et $f(e_3) = e_1 - 3e_2 - 2e_3$. On libère cette famille pour obtenir une base de $\text{Im } f$. Or ces trois vecteurs sont colinéaires. Donc $(e_1 - 3e_2 - 2e_3)$ est une base de $\text{Im}(f)$.

2. Le vecteur $e_1 - 3e_2 - 2e_3$ appartient au noyau et à l'image de f , d'où $\text{Im } f \cap \text{Ker } f \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$, donc $\text{Im } f$ et $\text{Ker } f$ ne sont pas en somme directe, et donc pas supplémentaires.

3. ANALYSE — Soient la matrice $M' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et une base $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ de $\mathbb{R}^3$:

$$[f]_{\mathcal{C}} = M' \iff \begin{cases} f(\varepsilon_1) = \varepsilon_2 \\ f(\varepsilon_2) = 0 \\ f(\varepsilon_3) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \varepsilon_2 \in \text{Im } f \cap \text{Ker } f \\ \varepsilon_3 \in \text{Ker } f \end{cases}.$$

SYNTHÈSE — La question 2 nous renseigne sur $\text{Im } f \cap \text{Ker } f$. On pose :

- $\varepsilon_2 = e_1 - 3e_2 - 2e_3$ qui est bien dans $\text{Im } f \cap \text{Ker } f$;
- $\varepsilon_1 = e_1$ qui est bien un antécédent de ε_2 d'après la première colonne de la matrice M ;
- $\varepsilon_3 = e_2 + e_3$ qui est bien dans $\text{Ker } f$.

Si $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, alors :

- P est inversible car $\det P \neq 0$;
- $P^{-1}MP = M'$ car $f(\varepsilon_1) = \varepsilon_2$, $f(\varepsilon_2) = 0$ et $f(\varepsilon_3) = 0$.

Exercice 2. Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Montrer que l'endomorphisme $f : \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K}[X]$, $P \mapsto P' + P$ est bijectif.
2. Déterminer le noyau de l'endomorphisme $\varphi : \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K}[X]$, $P(X) \mapsto X \cdot [P(X) - P(X-1)]$. L'endomorphisme φ est-il injectif? surjectif?
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\mathbb{K}_n[X]$ est stable par f . Écrire la matrice, dans la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$, de l'endomorphisme induit par f sur $\mathbb{K}_n[X]$.
4. Même question pour φ .

1. (L'application f est un endomorphisme mais l'ev $\mathbb{K}[X]$ étant de dimension infinie, ne pas écrire que injective $\iff$ surjective $\iff$ bijective.)

• Première méthode :

Soit $P \in \mathbb{K}[X] : P \in \text{Ker } f \implies f(P) = 0 \implies P' = -P \implies P = 0$ car, par l'absurde : si $P \neq 0$, alors $\deg P' < \deg P$, or $P' = -P$. C'est absurde. D'où $\text{Ker } f \subset \{0_{\mathbb{K}[X]}\}$, donc l'endomorphisme f est injectif.

Soient deux polynômes $P = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$ et $Q = \sum_{k=0}^n b_kX^k$:

$$Q = f(P) \iff \begin{cases} b_0 = a_0 + a_1 \\ b_1 = a_1 + 2a_2 \\ \dots \\ b_{n-1} = a_{n-1} + na_n \\ b_n = a_n \end{cases}$$

Et, en remontant le système, on trouve une solution $(a_0, \dots, a_n)$. Pour tout polynôme Q , l'équation $f(P) = Q$ admet une solution P , donc la fonction f est surjective.

• Deuxième méthode :

ANALYSE – Soit Q est un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}$. Si $Q = f(P)$, alors $P + P' = Q$ et, en dérivant : $P' + P'' = Q'$, $P'' + P^{(3)} = Q''$, $\dots$, $P^{(n)} + P^{(n+1)} = Q^{(n)}$ et $P^{(n+1)} + P^{(n+2)} = 0$ car $Q^{(n+1)} = 0$. D'où (télescope) : $(P + P') - (P' + P'') + (P'' + P^{(3)}) - \dots + (-1)^n(P^{(n)} + P^{(n+1)}) - (-1)^n(P^{(n+1)} + P^{(n+2)}) = Q - Q' + Q'' - \dots + (-1)^nQ^{(n)}$. D'où $P = Q - Q' + Q'' - \dots + (-1)^nQ^{(n)}$. D'où l'unicité du polynôme P et, donc, l'endomorphisme f est injectif.

SYNTHÈSE – Soit $P = Q - Q' + Q'' - \dots + (-1)^nQ^{(n)}$. On vérifie que $Q = f(P)$. D'où l'existence du polynôme P et, donc, l'endomorphisme f est surjectif.

2. Soit $P(X)$ un polynôme : si $P(X) \in \text{Ker}(\varphi)$, alors $X \cdot [P(X) - P(X-1)]$ est le polynôme nul, d'où $P(X) - P(X-1)$ est le polynôme nul, d'où $P(x) = P(0)$ pour tout $x \in \mathbb{Z}$, d'où $P(x) - P(0) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{Z}$, d'où le polynôme $P(X) - P(0)$ a une infinité de racines, d'où $P(X) - P(0)$ est le polynôme nul, donc $P(X)$ est constant.

Réciproquement : si $P(X)$ est constant, alors $P(X) \in \text{Ker}(\varphi)$.

Donc le noyau de φ est l'ensemble $\text{Vect}(1)$ des polynômes constants.

Le noyau de φ n'est pas $\{0\}$, donc φ n'est pas injective. D'autre part, par définition de φ , tout polynôme de $\text{Im}(\varphi)$ est divisible par X pour tout P , d'où le polynôme 1 n'appartient pas à l'image de φ , donc φ n'est pas surjective.

3. $f(X^0) = X^0$ et, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $f(X^k) = kX^{k-1} + X^k$ appartiennent au *sev* $\mathbb{K}_n[X]$ qui est donc stable par f . Dans la base $(1, X, \dots, X^n)$ de $\mathbb{K}_n[X]$, la matrice A de f :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & & \\ 0 & 1 & 2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & n \\ & & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Soit $k \in \mathbb{N} : \varphi(X^k) = X \cdot [X^k - (X-1)^k] = X \cdot \left[X^k - \sum_{p=0}^k \binom{k}{p} (-1)^{k-p} X^p \right]$, d'où $\varphi(X^0) = 0$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\varphi(X^k) = \sum_{p=0}^{k-1} (-1)^{k-p+1} \binom{k}{p} X^{p+1} = \sum_{p=1}^k (-1)^{k-p} \binom{k}{p-1} X^p.$$

Par suite, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\varphi(X^k) \in \mathbb{K}_n[X]$. Donc $\mathbb{K}_n[X]$ est stable par φ .

D'après le calcul de $\varphi(X^k)$, la matrice M de f dans la base canonique $(1, X, \dots, X^n)$ de $\mathbb{K}_n[X]$ s'écrit

$$M = \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & 1 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & n \end{pmatrix} = (m_{ij})_{(i,j) \in [0,n]^2}$$

où $m_{ij} = (-1)^{j-i} \binom{j}{i-1}$ si $1 \leq i \leq j$ et $m_{ij} = 0$ sinon.

Exercice 3. Soit x_0 un réel. On considère l'application linéaire :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_2[X] &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ P &\longmapsto \left(\int_{-1}^{+1} P(t) dt, P(x_0), P(-x_0) \right). \end{aligned}$$

1. Ecrire la matrice, dans les bases canoniques, de l'application linéaire f .
2. Quelles sont les trois valeurs de x_0 pour lesquelles l'application f n'est pas injective ? Déterminer, pour chacune de ces valeurs, une base du noyau de f .
3. Pour quelles valeurs de x_0 l'application f est-elle bijective ? Calculer alors $f^{-1}(a, b, c)$ pour chaque $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

1. $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2/3 \\ 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & -x_0 & x_0^2 \end{pmatrix}$.
2. $\det M = 4x_0(x_0^2 - \frac{1}{3})$.

$\dim \mathbb{R}_2[X] = \dim \mathbb{R}^3$, d'où : f est injective ssi f est bijective.

f n'est pas injective ssi $\det M = 0$, ssi $x_0 \in \{-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, +\frac{1}{\sqrt{3}}\}$.

Soit $P = \alpha + \beta X + \gamma X^2$:

– si $x_0 = 0$, alors $P \in \text{Ker } f \iff M \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} \alpha = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases} \iff P = \beta X$. D'où le polynôme X forme une base de $\text{Ker } f$.

– si $x_0 = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$, alors $P \in \text{Ker } f \iff M \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} \beta = 0 \\ \gamma = -3\alpha \end{cases} \iff P = \alpha - 3\alpha X^2$. D'où le polynôme $1 - 3X^2$ forme une base de $\text{Ker } f$.

3. L'application f est bijective ssi $\det f \neq 0$, ssi $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, +\frac{1}{\sqrt{3}}\}$. Alors

$$\begin{aligned} f(\alpha + \beta X + \gamma X^2) = (a, b, c) &\iff M \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} 2\alpha + \frac{2}{3}\gamma = a \\ \alpha + x_0\beta + x_0^2\gamma = b \\ \alpha - x_0\beta + x_0^2\gamma = c \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = \frac{ax_0^2 - \frac{1}{3}b - \frac{1}{3}c}{2(\frac{1}{3} - x_0^2)} \\ \beta = \frac{b-c}{2x_0} \\ \gamma = \frac{a-b-c}{2(\frac{1}{3} - x_0^2)} \end{cases}. \end{aligned}$$

Donc

$$f^{-1}(a, b, c) = \frac{ax_0^2 - \frac{1}{3}b - \frac{1}{3}c}{2(\frac{1}{3} - x_0^2)} + \frac{b-c}{2x_0}X + \frac{a-b-c}{2(\frac{1}{3} - x_0^2)}X^2.$$

Exercice 4 (Matrices carrées de rang 1). Soit A une matrice carrée telle que $\text{rg}(A) = 1$.

1. En se plaçant dans une base adaptée, montrer que $A^2 = \text{tr}(A) \cdot A$.

- Montrer qu'il existe deux vecteurs colonnes U et V non nuls tels que : $A = U \cdot V^T$. Redémontrer ainsi le résultat de la question précédente. En utilisant les vecteurs colonnes U et V , déterminer une base de $\text{Im}(A)$ et une équation de l'hyperplan $\text{Ker}(A)$.

- La matrice A (de taille $n \times n$) représente, dans une base $\mathcal{B}$ d'un $\mathbb{R}$ -ev E , un endomorphisme f . Le rang de f est égal à $\text{rg } A = 1$.

PREMIÈRE MÉTHODE — D'après le théorème du rang, la dimension du noyau $\text{Ker } f$ est donc $n - 1$. On peut construire une nouvelle base $\mathcal{B}'$ de l'ev E en complétant une base $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1})$ de $\text{Ker } f$ avec un vecteur ε_n . Dans cette nouvelle base, la matrice A' de f est de la forme :

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & * \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

où les $*$ sont des réels et λ aussi est un réel, égal à $\text{tr}(A')$. On calcule le carré de la matrice A' :

$$A'^2 = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & * \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & * \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \lambda* \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda* \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda^2 \end{pmatrix} = \lambda A'.$$

On revient dans la vieille base $\mathcal{B}$: $A^2 = \lambda A$ car $A'^2 = \lambda A'$ et $A = P A' P^{-1}$. Or $\lambda = \text{tr}(A')$. Et $\text{tr}(A') = \text{tr } A$ car les matrices A et A' sont semblables. Donc $A^2 = \text{tr}(A) \cdot A$.

SECONDE MÉTHODE — On peut construire une nouvelle base $\mathcal{B}'$ de l'ev E en complétant une base (ε_1) de $\text{Im } f$ en une base $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ de E . Dans cette nouvelle base, la matrice A' de f est de la forme :

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda & \cdots & * & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où les $*$ sont des réels et λ aussi est un réel, égal à $\text{tr}(A')$. Puis on poursuit comme dans la première méthode.

- La matrice A est de rang 1, toutes ses colonnes sont donc colinéaires à une même colonne U :

$$A = (v_1 U \quad v_2 U \quad \cdots \quad v_n U) = U V^T, \quad \text{où } V^T = (v_1 \quad v_2 \quad \cdots \quad v_n).$$

Les vecteurs U et V ne sont pas nuls (par l'absurde : si U ou V est nul, alors la matrice A est nulle et c'est absurde car elle est de rang 1).

Redémontrons le résultat de la question 1 : $A^2 = (U V^T) \cdot (U V^T) = U (V^T U) V^T$ par associativité du produit matriciel. D'où $A^2 = (V^T U) U V^T$ car $(V^T U)$ est un scalaire et commute donc avec les matrices. On a ainsi montré que $A^2 = (V^T U) A$, or $V^T U = \text{tr}(A)$ car la somme des éléments diagonaux de $A = (v_1 U \quad v_2 U \quad \cdots \quad v_n U)$ est $\text{tr}(A) = v_1 u_1 + v_2 u_2 + \cdots + v_n u_n = V^T U$.

L'image de tout vecteur colonne X s'écrit $AX = U V^T X$ et est donc colinéaire à U . Ce vecteur colonne U non nul forme donc une base de $\text{Im}(A)$.

Soit X un vecteur colonne : $X \in \text{Ker}(A) \iff AX = 0 \iff U V^T X = 0 \iff (V^T X) U = 0 \iff V^T X = 0$ car le vecteur colonne U est non nul. Une équation de $\text{Ker}(A)$ est donc $v_1 x_1 + v_2 x_2 + \cdots + v_n x_n = 0$, en notant v_i les coordonnées de V et x_i les coordonnées de X .

REMARQUE : $\text{Ker}(A)$ est un hyperplan car :

- (première méthode) d'après le théorème du rang, c'est un *sev* de dimension $n - 1$;
- (deuxième méthode) c'est le noyau de la forme linéaire $X \mapsto V^T X$ qui est non nulle car le vecteur V est non nul.

Exercice 5. On se place dans $\mathbb{R}^4$ et on considère les sous-espaces vectoriels :

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y = 0, z + t = 0\}$$

$$\text{et } G = \text{Vect} \{(1, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 1)\}.$$

- Montrer que F et G sont supplémentaires.
- Déterminer la matrice du projecteur p sur F parallèlement à G dans la base canonique.

3. Calculer la matrice de la symétrie s par rapport à F parallèlement à G dans la base canonique.

1. Soit $x = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$:

$$(x, y, z, t) \in F \iff \begin{cases} y = -x \\ t = -z \end{cases} \iff (x, y, z, t) = xa + zb,$$

où $a = (1, -1, 0, 0)$ et $b = (0, 0, 1, -1)$. Donc $\mathcal{B}_1 = (a, b)$ est une base de F .

$G = \text{Vect}(c, d)$, avec $c = (1, 1, 0, 0)$ et $d = (0, 0, 1, 1)$. La famille $\mathcal{B}_2 = (c, d)$ est donc génératrice de G , elle est aussi libre, donc c'est une base de G .

On concatène ces deux bases : la famille $\mathcal{B} = (a, b, c, d)$ est une base de $\mathbb{R}^4$ car elle contient 4 vecteurs et elle est libre. En effet : pour tous scalaires α, β, γ et δ ,

$$\alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d = 0 \implies \alpha = \beta = \gamma = \delta = 0.$$

Donc F et G sont supplémentaires.

2. La matrice de p dans la base $\mathcal{B}$ est

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

car $p(a) = a$, $p(b) = b$, $p(c) = 0$ et $p(d) = 0$. Donc la matrice A de p dans la base canonique est égale à $P \cdot A' \cdot P^{-1}$, où

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{ On inverse la matrice de passage : } P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Donc la matrice de } p \text{ dans la}$$

base canonique est :

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3. On a $s = 2p - Id$. Donc La matrice de la symétrie s dans la base canonique est :

$$2A - I_4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6. Soient x, y, z et t quatre nombres réels. Calculer, en le factorisant au maximum, le déterminant

$$D(x, y, z, t) = \begin{vmatrix} x & y & z & t \\ -x & y & -z & t \\ z & t & x & y \\ -z & t & -x & y \end{vmatrix}.$$

On remarque que : si $x = \pm z$ ou $y = \pm t$, alors le déterminant est nul. On cherche donc des facteurs de la forme $(x \pm z)$ et $(y \pm t)$. Pour les faire apparaître, on effectue des opérations sur les colonnes ou les lignes :

$C_1 + C_3 \rightarrow C_1$ et $C_2 + C_4 \rightarrow C_2$ ne changent pas le déterminant, d'où :

$$D(x, y, z, t) = \begin{vmatrix} x+z & y+t & z & t \\ -x-z & y+t & -z & t \\ z+x & t+y & x & y \\ -z-x & t+y & -x & y \end{vmatrix} = (x+z) \cdot (y+t) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & z & t \\ -1 & 1 & -z & t \\ 1 & 1 & x & y \\ -1 & 1 & -x & y \end{vmatrix}.$$

Puis $L_1 - L_3 \rightarrow L_1$ et $L_4 - L_2 \rightarrow L_4$ ne changent pas ce déterminant, d'où :

$$D(x, y, z, t) = (x+z) \cdot (y+t) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & z-x & t-y \\ -1 & 1 & -z & t \\ 1 & 1 & x & y \\ 0 & 0 & z-x & y-t \end{vmatrix}.$$

On développe suivant la première ligne :

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & z-x & t-y \\ -1 & 1 & -z & t \\ 1 & 1 & x & y \\ 0 & 0 & z-x & y-t \end{vmatrix} = +(z-x) \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 & t \\ 1 & 1 & y \\ 0 & 0 & y-t \end{vmatrix} - (t-y) \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 & -z \\ 1 & 1 & x \\ 0 & 0 & z-x \end{vmatrix} = (z-x) \cdot (y-t) \cdot (-2) - (t-y) \cdot (z-x) \cdot (-2).$$

Finalement : $D(x, y, z, t) = 4 \cdot (x+z) \cdot (y+t) \cdot (t-y) \cdot (z-x)$.

Exercice 7. Calculer, sous une forme factorisée, le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^4 \\ 1 & b & b^2 & b^4 \\ 1 & c & c^2 & c^4 \\ 1 & d & d^2 & d^4 \end{vmatrix}.$$

(Une indication ? Insérer une nouvelle ligne et une nouvelle colonne dans ce déterminant pour faire apparaître un déterminant de Vandermonde.)

Exercice 8 (Formes linéaires). Sur $E = \mathbb{R}_n[X]$, on définit les $n+1$ formes linéaires :

$$\phi_k : P \mapsto P^{(k)}(0) \quad \text{avec} \quad k \in \{0, \dots, n\}.$$

Montrer que la famille $(\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n)$ est libre.

Soit $(\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$: si $\alpha_0 \phi_0 + \dots + \alpha_n \phi_n = 0$, alors

- $\alpha_0 \phi_0(X^0) + \dots + \alpha_n \phi_n(X^0) = \alpha_0 = 0$;
- $\alpha_0 \phi_0(X^1) + \dots + \alpha_n \phi_n(X^1) = \alpha_1 = 0$;
- ...
- $\alpha_0 \phi_0(X^n) + \dots + \alpha_n \phi_n(X^n) = n! \alpha_n = 0$.

D'où $\alpha_0 = \dots = \alpha_n = 0$. Donc la famille $(\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n)$ est libre.

Exercice 9 (Familles libres & déterminant de Vandermonde). Soient n réels $a_1 < a_2 < \dots < a_n$. Montrer (de deux manières) que les n fonctions définies, pour chaque $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, par

$$f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto e^{a_k x}$$

sont linéairement indépendantes.

Supposons que $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \dots + \lambda_n f_n = 0$ (ici 0 est la fonction nulle sur tout $\mathbb{R}$). On veut montrer que $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$. Par l'absurde : si les réels λ_k ne sont pas tous nuls, alors notons p le plus grand indice tel que $\lambda_p \neq 0$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda_1 e^{a_1 x} + \lambda_2 e^{a_2 x} + \dots + \lambda_p e^{a_p x} = 0 \quad \text{et} \quad \lambda_p \neq 0.$$

Le dernier terme est le terme dominant quand x tend vers $+\infty$, divisons donc par $e^{a_p x}$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda_1 e^{(a_1 - a_p)x} + \lambda_2 e^{(a_2 - a_p)x} + \dots + \lambda_p = 0.$$

Passons à la limite $x \rightarrow +\infty$: $\lambda_p = 0$. C'est absurde.

D'où $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$. Donc les n fonctions f_k sont linéairement indépendantes.

Autre méthode : on utilise un déterminant de Vandermonde.

Supposons que $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \dots + \lambda_n f_n = 0$. La fonction $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \dots + \lambda_n f_n$ est nulle, donc constante. Sa dérivée est donc nulle et, de même, toutes ses dérivées successives sont nulles. D'où, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \lambda_1 e^{a_1 x} + \lambda_2 e^{a_2 x} + \dots + \lambda_n e^{a_n x} = 0 \\ \lambda_1 a_1 e^{a_1 x} + \lambda_2 a_2 e^{a_2 x} + \dots + \lambda_n a_n e^{a_n x} = 0 \\ \lambda_1 a_1^2 e^{a_1 x} + \lambda_2 a_2^2 e^{a_2 x} + \dots + \lambda_n a_n^2 e^{a_n x} = 0 \\ \vdots \\ \lambda_1 a_1^{n-1} e^{a_1 x} + \lambda_2 a_2^{n-1} e^{a_2 x} + \dots + \lambda_n a_n^{n-1} e^{a_n x} = 0. \end{cases}$$

En particulier, si $x = 0$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_{n-1}^2 & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_{n-1}^{n-1} & a_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Or la matrice carrée est inversible car son déterminant est un déterminant de Vandermonde et est non nul car les a_k sont distincts

deux à deux. D'où $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. Donc les fonctions f_k sont linéairement indépendantes.

Exercice 10. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 + I_n$ ne soit pas inversible.

1. Montrer qu'il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $AX = iX$ et $X \neq 0$.
2. Montrer qu'il existe U et V dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ libres tels que $AU = -V$ et $AV = U$.

1. La matrice $A^2 + I_n$ se factorise dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sous la forme $(A - iI_n)(A + iI_n)$. Comme elle n'est pas inversible, c'est que l'une au moins des deux matrices $(A - iI_n)$ et $(A + iI_n)$ n'est pas inversible.

Premier cas : si $A - iI_n$ n'est pas inversible, alors il existe un vecteur $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ non nul tel que $AX = iX$.

Second cas : si $A + iI_n$ n'est pas inversible, alors il existe de même un vecteur $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ non nul tel que $AY = -iY$. D'où $A\bar{Y} = i\bar{Y}$, en notant $\bar{Y}$ le vecteur colonne dont les coordonnées sont les complexes conjugués des coordonnées de Y . Et en utilisant le fait que $\bar{i} = -i$ et que les éléments de la matrice sont réels car $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$.

2. On écrit le vecteur X de la question (a) sous la forme $U + iV$ où U et V sont dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. De $AX = iX$, on déduit que $A(U + iV) = i(U + iV)$ et donc

$$AU = -V \quad \text{et} \quad AV = U.$$

Reste à montrer, par l'absurde, que les vecteurs U et V ne sont pas liés. Il est impossible que U ou V soit nul, sinon U et V le seraient d'après les deux dernières équations, donc X serait nul, ce qui n'est pas le cas. Par suite, si (U, V) est une famille liée, on peut supposer sans perte de généralité que $\exists k \in \mathbb{R}^*, U = kV$. De la première équation ci-dessus, on tire $AV = -V/k$, et de la seconde, $AV = kV$, d'où l'on déduit $(1 + k^2)V = 0$, donc $V = 0$ (puisque k est réel), mais on vient de voir que cela est impossible.

La famille (U, V) est donc libre.

Exercice 11. Soit une matrice carrée $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que le réel $\text{tr}(A^T \cdot A)$ est égal à la somme des carrés de tous les éléments de la matrice A .
2. Montrer que : $A^T A = 0 \iff A = 0$.
3. Montrer que $\text{Ker } A = \text{Ker}(A^T \cdot A)$.
4. Soit la forme linéaire

$$\tau_A : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, M \mapsto \text{tr}(A^T \cdot M).$$

Calculer l'image $\tau_A(E_{ij})$ de chaque matrice E_{ij} de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer, de deux manières, que : la forme linéaire τ_A est nulle si, et seulement si, la matrice A est nulle.

1. Soient $B = A^T$ et $C = A \cdot A^T = A \cdot B : c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^n a_{ik} a_{jk}$ car $b_{kj} = a_{jk}$. En particulier : $c_{ii} = \sum_{k=1}^n a_{ik}^2$. D'où

$$\text{tr}(C) = \sum_{i=1}^n c_{ii} = \sum_{i,k} a_{ik}^2.$$

2. Si $A = 0$, alors $A^T A = 0$. Réciproquement, si $A^T A = 0$, alors $\text{tr}(A^T A) = 0$, d'où la somme des carrés de tous les éléments de la matrice A est nulle, d'où chaque élément de la matrice A est nul, donc $A = 0$.
3. Supposons que $X \in \text{Ker } A$. Alors $AX = 0$, d'où $A^T \cdot AX = A^T \cdot 0 = 0$, d'où $X \in \text{Ker}(A^T \cdot A)$.

Donc $\text{Ker } A \subset \text{Ker}(A^T \cdot A)$.

Réciproquement, supposons que $X \in \text{Ker}(A^T \cdot A)$. Alors $A^T \cdot AX = 0$, d'où $X^T \cdot A^T \cdot AX = 0$, d'où $\|AX\|^2 = 0$, d'où $AX = 0$, d'où $X \in \text{Ker } A$.

Donc $\text{Ker}(A^T \cdot A) \subset \text{Ker } A$.

Finalement, les deux noyaux sont égaux.

$$4. A \cdot E_{ij} = j \begin{pmatrix} & i \\ a_{1,1} & a_{2,1} & \dots & a_{i,1} & \dots & a_{p,1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{1,j} & a_{2,j} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{p,j} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{1,n} & a_{2,n} & \dots & a_{i,n} & \dots & a_{p,n} \end{pmatrix} i \begin{pmatrix} & j \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = j \begin{pmatrix} & j \\ 0 & \dots & 0 & a_{i,1} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{i,j} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{i,n} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \text{ et}$$

$\tau_A(E_{ij}) = a_{ij}$ est la trace de cette matrice.

Si la matrice A est nulle, alors $\tau_A(M) = \text{tr}(0 \cdot M) = 0$ pour tout M , donc la fonction τ_A est nulle.

Réciproquement : si τ_A est nulle, alors $\tau_A(M) = 0$ pour tout M , en particulier $\tau_A(A^T) = 0$, d'où $\sum_{i,j} a_{ij}^2 = 0$, donc $A = 0$.

Autre méthode : si τ_A est nulle, alors $\tau_A(M) = 0$ pour tout M , en particulier $\tau_A(E_{ij}) = 0$ pour tout (i, j) , d'où $a_{ij} = 0$ pour tout (i, j) , donc $A = 0$.

Exercice 12 (Polynômes de Lagrange & déterminant de Vandermonde). Soient un entier $n \geq 2$ et n réels $a_1, a_2, \dots, a_n$ supposés distincts deux à deux. Soit l'application

$$\varphi : \mathbb{R}_{n-1}[X] \rightarrow \mathbb{R}^n, P \mapsto (P(a_1), P(a_2), \dots, P(a_n)).$$

- Montrer que l'application φ est linéaire et déterminer son noyau.
- On munit les $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $\mathbb{R}^n$ de leur base canonique : $(1, X, \dots, X^{n-1})$ et $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ respectivement. Écrire la matrice M représentant φ dans ces bases. Quel est le déterminant de cette matrice ?
- Les n polynômes de Lagrange $L_1, L_2, \dots, L_n$ sont définis par

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad L_i(X) = \prod_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i\}} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}.$$

Calculer $\varphi(L_i)$ pour chaque $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

- En utilisant à chaque fois une des trois questions précédentes, démontrer de trois manières que l'application φ est bijective.
- Montrer que $(L_1, L_2, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
- Reconnaître les polynômes

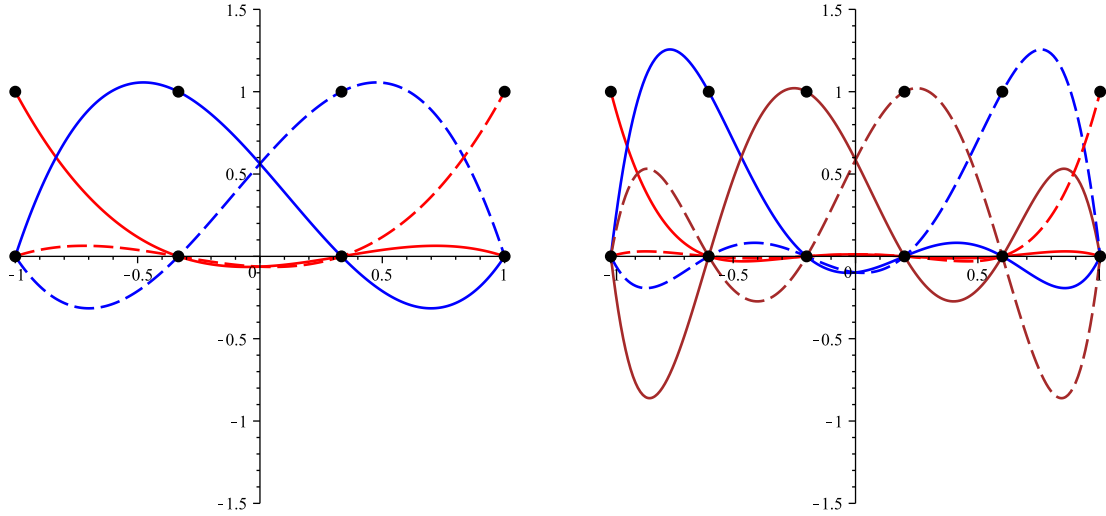
$$\sum_{i=1}^n P(a_i) L_i(X) \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^n L_i(X).$$

Exercice 13 (Les noyaux des itérés sont emboîtés).

Soient E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et f un endomorphisme de E .

- Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\text{Ker}(f^k) \subset \text{Ker}(f^{k+1}) \quad \text{et} \quad \text{Im}(f^{k+1}) \subset \text{Im}(f^k).$$



LES POLYNÔMES DE LAGRANGE POUR $n = 4$ ET $n = 6$ RÉELS ÉQUIDISTANTS DANS $[-1, +1]$

2. Montrer qu'il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que : $\text{Ker}(f^r) = \text{Ker}(f^{r+1})$.
3. Montrer que, pour tout $k \geq r$: $\text{Ker}(f^k) = \text{Ker}(f^{k+1})$.
4. Montrer que, pour tout $k \geq r$: $\text{Im}(f^k) = \text{Im}(f^{k+1})$.
5. Montrer que $\text{Ker}(f^r)$ et $\text{Im}(f^r)$ sont supplémentaires.

1. Soit $x \in \text{Ker}(f^k)$:

$$f^k(x) = 0_E, \text{ d'où } f[f^k(x)] = f(0_E), \text{ d'où } f^{k+1}(x) = 0_E, \text{ d'où } x \in \text{Ker}(f^{k+1}).$$

$$\text{Donc } \text{Ker}(f^k) \subset \text{Ker}(f^{k+1}).$$

$$\text{Soit } y \in \text{Im}(f^{k+1}) :$$

$$\text{il existe } x \in E \text{ tel que } y = f^{k+1}(x) = f^k[f(x)]. \text{ D'où } y \in \text{Im}(f^k).$$

$$\text{Donc } \text{Im}(f^{k+1}) \subset \text{Im}(f^k).$$

2. Soit, pour chaque $k \in \mathbb{N}^*$, $u_k = \dim \text{Ker}(f^k)$.

Par l'absurde, supposons que : $\forall k \in \mathbb{N}, \text{Ker}(f^k) \neq \text{Ker}(f^{k+1})$. La suite (u_k) est alors une suite d'entiers, strictement croissante et majorée par $n = \dim E$. C'est absurde.

$$\text{Donc } \exists r \in \mathbb{N}, \text{Ker}(f^r) = \text{Ker}(f^{r+1}).$$

3. Par récurrence :

- la propriété $P_k \ll \text{Ker}(f^k) = \text{Ker}(f^{k+1}) \gg$ est vraie pour $k = r$.
- supposons que P_k est vraie. On veut montrer que $\text{Ker}(f^{k+2}) \subset \text{Ker}(f^{k+1})$. Soit $x \in \text{Ker}(f^{k+2})$: $f(x) \in \text{Ker}(f^{k+1})$. D'après P_k , $f(x) \in \text{Ker}(f^k)$. D'où $f^k[f(x)] = f^{k+1}(x) = 0_E$. D'où $x \in \text{Ker}(f^{k+1})$. Donc P_{k+1} est vraie.
- On conclut que P_k est vraie pour tout $k \geq r$.

4. D'une part, $\text{Im}(f^{k+1}) \subset \text{Im}(f^k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

D'autre part, $\dim \text{Im}(f^{k+1}) = \dim \text{Im}(f^k)$ pour tout $k \geq r$ (d'après le théorème du rang et l'égalité des noyaux).

$$\text{Donc } \text{Im}(f^{k+1}) = \text{Im}(f^k) \text{ pour tout } k \geq r.$$

5. Par le théorème du rang, on sait déjà que $\dim \text{Ker}(f^r) + \dim \text{Im}(f^r) = \dim E$. Il reste à montrer que $\text{Ker}(f^r) \cap \text{Im}(f^r) = \{0_E\}$. Soit $y \in \text{Ker}(f^r) \cap \text{Im}(f^r)$: d'une part $y \in \text{Im}(f^r)$, d'où $\exists x \in E, y = f^r(x)$. D'autre part, $y \in \text{Ker}(f^r)$, d'où $0_E = f^r(y) = f^{2r}(x)$, d'où $x \in \text{Ker}(f^{2r})$. Or $\text{Ker}(f^r) = \text{Ker}(f^{2r})$, d'où $x \in \text{Ker}(f^r)$, d'où $f^r(x) = 0_E$. Donc $y = 0_E$.

Exercice 14. Soient une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et l'endomorphisme

$$\varphi_A : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), M \mapsto A \cdot M.$$

1. Montrer que l'endomorphisme φ_A est bijectif si, et seulement si, la matrice A est inversible.
2. Déterminer la trace $\text{tr}(\varphi_A)$ de l'endomorphisme φ_A .

1. Si la matrice A est inversible, alors $(\varphi_{A^{-1}} \circ \varphi_A)(M) = A^{-1} \cdot (A \cdot M) = (A^{-1} \cdot A) \cdot M = M$, d'où φ_A est bijective et sa réciproque est $\varphi_{A^{-1}}$.

Réciproquement :

- (première méthode) Si la matrice A n'est pas inversible, alors il existe un vecteur-colonne X non nul tel que $AX = 0$. Soit M la matrice carrée dont chaque colonne est égale à X . La matrice carrée M n'est pas nulle et son image $\varphi_A(M)$ est la matrice carrée nulle. D'où l'endomorphisme φ_A n'est pas injectif. Donc φ_A n'est pas bijectif.
- (deuxième méthode) Si φ_A est bijectif, alors φ_A est surjectif. En particulier, il existe une matrice carrée M telle que $\varphi_A(M) = I_2$. D'où $AM = I_2$. Donc la matrice A est inversible.

$$2. \quad \varphi_A(E_{ij}) = A \cdot E_{ij} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} i \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1,i} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{i,i} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,i} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{d'où } \varphi_A(E_{ij}) = \sum_{k=1}^n a_{ki} E_{kj}.$$

Dans la base canonique $(E_{ij})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la matrice de l'endomorphisme φ_A est une matrice $n^2 \times n^2$. Pour chaque couple (i, j) , la coordonnée, suivant E_{ij} , de $\varphi_A(E_{ij}) = \sum_{k=1}^n a_{ki} E_{kj}$ est a_{ii} . Donc $\text{tr}(\varphi_A) = \sum_{i,j} a_{ii} = n \sum_{i=1}^n a_{ii} = n \cdot \text{tr}(A)$.

Exercice 15 (Polynômes annulateurs). 1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et Φ l'endomorphisme défini par

$$\Phi(M) = (\text{tr } M)I_n + M$$

pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Trouver un polynôme de degré 2 annulateur de Φ .

2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice d'un projecteur et Φ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par

$$\Phi(M) = PM + MP.$$

Déterminer un polynôme annulateur non nul de Φ .

1. On calcule $\Phi^2(M) = \text{tr}(\Phi(M))I_n + \Phi(M) = (n \text{tr } M + \text{tr } M)I_n + (\text{tr } M)I_n + M = (n+2)(\text{tr } M)I_n + M$, et on constate que $\Phi^2(M) - (n+2)\Phi(M) + (n+1)M = 0$ pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Par suite, le polynôme

$$P = X^2 - (n+2)X + n+1$$

est annulateur de Φ .

2. La matrice P est celle d'un projecteur, d'où $P^2 = P$. On cherche un polynôme annulateur de Φ :

$$\Phi^2(M) = P(PM + MP) + (PM + MP)P = \Phi(M) + 2PMP, \quad \text{donc } 2PMP = \Phi^2(M) - \Phi(M)$$

$$\Phi^3(M) = \Phi^2(M) + 4PMP = 3\Phi^2(M) - 2\Phi(M).$$

On en déduit que le polynôme $X^3 - 3X^2 + 2X = X(X-1)(X-2)$ est annulateur de l'endomorphisme Φ .

Exercice 16 (Polynômes annulateurs). Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $f : E \rightarrow E$ un endomorphisme. Montrer que : si P et Q sont deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ dont le produit est annulateur de f , alors $\text{Im } Q(f) \subset \text{Ker } P(f)$ et $\text{Im } P(f) \subset \text{Ker } Q(f)$.

$(PQ)(f) = P(f) \circ Q(f)$. Si $(PQ)(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$, alors : $\forall x \in E$, $P(f)[Q(f)(x)] = 0_E$. Soit un vecteur $y \in \text{Im } Q(f)$: il existe un vecteur $x \in E$, tel que $y = Q(f)(x)$. D'où $P(f)(y) = 0_E$. Donc $\text{Im } Q(f) \subset \text{Ker } P(f)$. De même pour l'autre inclusion car $(PQ)(f) = (QP)(f)$.

Exercice 17. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'elles sont aussi semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inversible telle que $B = P^{-1}AP$. D'où $PB = AP$. Or $P = Q + iR$, où les matrices Q et R sont à coefficients réels. Et les matrices A et B sont aussi à coefficients réels, d'où $QB = AQ$ et $RB = AR$. Donc

$$\forall t \in \mathbb{R}, (Q + tR)B = QB + tRB = AQ + tAR = A(Q + tR).$$

Il suffit, pour conclure, de montrer qu'il existe un réel t telle que la matrice $Q + tR$ est inversible. Or $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \det(Q + zR)$ est une fonction polynomiale, et non nulle car $f(i) \neq 0$ car la matrice $P = Q + iR$ est inversible. Le polynôme a donc un nombre fini de racines. En particulier, il existe une valeur réelle de z telle que $f(z) \neq 0$.

Exercice 18 (Oral Centrale PSI 2014). Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$.

Montrer que $\dim(\text{Ker}u) \leq \dim(\text{Ker}u^2) \leq 2 \dim(\text{Ker}u)$. (On pourra utiliser l'endomorphisme induit par u sur $\text{Im}(u)$.)

$\dim(\text{Ker}u) \leq \dim(\text{Ker}u^2)$ car $\text{Ker}u \subset \text{Ker}u^2$. Montrons que $\dim(\text{Ker}u^2) - \dim(\text{Ker}u) \leq \dim(\text{Ker}u)$.

Par théorème du rang, $\dim(\text{Ker}u^2) - \dim(\text{Ker}u) = \text{rg}(u) - \text{rg}(u^2)$. L'endomorphisme $\tilde{u} : \text{Im}(u) \rightarrow \text{Im}(u), x \mapsto u(x)$ induit par u sur $\text{Im}(u)$ est bien défini car le sous-espace vectoriel $\text{Im}(u)$ est stable par u . Or $\text{Ker}\tilde{u} = \text{Ker}u \cap \text{Im}u$ et $\text{Im}\tilde{u} = \text{Im}u^2$, d'où par théorème du rang appliqué à $\tilde{u}$, $\text{rg}(u) - \text{rg}(u^2) = \dim(\text{Ker}u \cap \text{Im}u)$. On a donc $\text{rg}(u) - \text{rg}(u^2) \leq \dim(\text{Ker}u)$, et le résultat.

Autre méthode — Au lieu de l'endomorphisme $\tilde{u}$ induit par u sur $\text{Im}(u)$, on pose l'application linéaire $v : \text{Ker}(u^2) \rightarrow \text{Ker}(u), x \mapsto u(x)$, elle aussi bien définie car : $\forall x \in \text{Ker}(u^2), u(x) \in \text{Ker}(u)$ car $u[u(x)] = u^2(x) = 0_E$. Alors $\text{Ker}v = \text{Ker}(u) \cap \text{Ker}(u^2) = \text{Ker}(u)$ et $\text{Im}v \subset \text{Ker}(u)$. Par le théorème du rang, $\dim \text{Ker}(u^2) = \dim \text{Im}v + \dim \text{Ker}v \leq 2 \dim \text{Ker}(u)$.

Exercice 19 (Hyperplans). Soit E un espace vectoriel. Soient H et H' deux hyperplans de E . Montrer qu'ils possèdent un supplémentaire commun.

Le *sev* H est un hyperplan de l'*ev* E , c'est donc le noyau d'une forme linéaire φ et cette forme linéaire est non nulle : il existe donc un vecteur $u \in E$ tel que $\varphi(u) \neq 0$. De même $H' = \text{Ker } \varphi'$ et : $\exists u' \in E, \varphi'(u') \neq 0$. On distingue trois cas :

- si $u' \notin H$, alors la droite vectorielle $\text{Vect}(u')$ est un supplémentaire commun à H et H' ;
- si $u \notin H'$, alors la droite vectorielle $\text{Vect}(u)$ est un supplémentaire commun à H et H' ;
- sinon $u' \in H$ et $u \in H'$, d'où $\varphi(u') = 0$ et $\varphi'(u) = 0$, d'où $\varphi(u + u') = \varphi(u) + \varphi(u') \neq 0$ et $\varphi'(u + u') = \varphi'(u) + \varphi'(u') \neq 0$, d'où $u + u'$ n'appartient ni à H ni à H' , donc la droite vectorielle $\text{Vect}(u + u')$ est un supplémentaire commun à H et H' .

Exercice 20 (Matrices à diagonale strictement dominante). Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, |a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$$

Montrer que A est inversible.

La matrice A est inversible si, et seulement si, pour tout vecteur colonne X , $(AX = 0 \implies X = 0)$.

Par l'absurde. Supposons qu'il existe $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ non nul tel que $AX = 0$.

Parce que $X \neq 0$, il existe un indice $I \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $x_I \neq 0$ et $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, |x_j| \leq |x_I|$ (*).

Pour cet indice I particulier :

— d'une part $|a_{I,I}| > \sum_{j \neq I} |a_{I,j}|$ car la matrice est à diagonale strictement dominante ;

— d'autre part $\sum_{j=1}^n a_{Ij}x_j = 0$, d'où $-a_{II}x_I = \sum_{j \neq I} a_{Ij}x_j$, d'où

$$\begin{aligned} |a_{II}| |x_I| &= \left| \sum_{j \neq I} a_{Ij}x_j \right| \\ &\leq \sum_{j \neq I} |a_{Ij}| |x_j| \quad \text{par l'inégalité triangulaire} \\ &\leq \sum_{j \neq I} |a_{Ij}| |x_I| \quad \text{car (*)} \\ |a_{II}| &\leq \sum_{j \neq I} |a_{Ij}| \quad \text{car } x_I \neq 0. \end{aligned}$$

C'est absurde car cette dernière ligne contredit la ligne encadrée.