

- Il sera tenu compte de la rédaction du devoir tant au niveau des explications que de la présentation. Toute affirmation non justifiée ne rapportera aucun point.
- Si le candidat repère ce qu'il croit être une erreur d'énoncé, il l'indique sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.
- Les calculatrices sont interdites.
- Le candidat est invité à encadrer ses résultats dans la mesure du possible.
- Toute utilisation de correcteur est interdite : le candidat peut raturer proprement à la règle si besoin.
- Le candidat composera sur des feuilles **simples** uniquement numérotées et les attachera ensemble dans l'ordre avec un trombone.

Exercice 1

On note f la fonction $x \mapsto \frac{x}{\ln x}$.

- (1) Dresser le tableau de variations de f .
- (2) Comparer e^π et π^e .
- (3) Résoudre dans $(\mathbb{N}^*)^2$ l'équation $a^b = b^a$.

Exercice 2

- (1) Dans cette question, on note x un réel non nul tel que $x + \frac{1}{x}$ soit un entier relatif.
 - (1.a) Développer $(x^n + \frac{1}{x^n})(x + \frac{1}{x})$ pour tout entier naturel n .
 - (1.b) Montrer que pour tout entier naturel n , le nombre $x^n + \frac{1}{x^n}$ est un entier relatif.
 - (1.c) En déduire que pour tout entier naturel n , $\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{2}{3+\sqrt{5}}\right)^n$ est un entier relatif.
- (2) (2.a) Dresser le tableau de variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = x + \frac{1}{x}.$$

- (2.b) En déduire qu'il existe une infinité de réels non nuls x tels que $x + \frac{1}{x} \in \mathbb{Z}$.

Exercice 3

On cherche dans cet exercice toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |f(x) - f(y)| = |x - y|.$$

On appellera une telle fonction une *isométrie*.

- (1) **Analyse.** Soit f une isométrie. On note alors δ la fonction $x \mapsto f(x) - f(0)$.
 - (1.a) Montrer, en étudiant la quantité $(f(x) - f(y))^2$, que $\delta(x)\delta(y) = xy$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
 - (1.b) En déduire la forme de f .
- (2) **Synthèse.** Conclure.