

Exercice 1

(1) La fonction f est définie et dérivable sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$ et

$$\forall x \in]0, 1[\cup]1, +\infty[, f'(x) = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$$

d'où le tableau de variations ci-dessous :

x	0	1	e	$+\infty$	
$f'(x)$		—	—	0	+
f	0	$-\infty$	$+\infty$	e	$+\infty$

Enfin, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln x} = 0$ donc la courbe de f présente une branche parabolique au voisinage de $+\infty$ de direction asymptotique $y = 0$.

(2) Puisque $\pi^e = e^{e \ln \pi}$, comparons π et $e \ln \pi$. Comme $\pi \geq e$, d'après le tableau des variations de f , on a $\frac{\pi}{\ln \pi} \geq e$ et donc $\pi^e \leq e^\pi$.

(3) Il est clair que les couples (a, a) avec $a \in \mathbb{N}^*$ sont tous solutions. Cherchons les éventuelles autres solutions : on considère $(a, b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que $a < b$ et $a^b = b^a$. Ainsi $b \ln a = a \ln b$. Si $a = 1$, alors $b = b^a = a^b = 1$, ce qui contredit l'inégalité $a < b$. Ainsi $b > a > 1$ et donc $\frac{b}{\ln b} = \frac{a}{\ln a}$.

D'après le tableau de variations de f , $1 < a < e \leq b$. Comme $a \in \mathbb{N}^*$, nécessairement $a = 2$. Or, $f(4) = f(2)$ puisque $2^4 = 4^2 = 16$, donc $(a, b) = (2, 4)$. Réciproquement, on vérifie sans difficulté que les solutions sont (a, b) , $(2, 4)$ et $(4, 2)$.

Exercice 2

(1) (1.a) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} \left(x^n + \frac{1}{x^n}\right) \left(x + \frac{1}{x}\right) &= x^{n+1} + x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}} + \frac{1}{x^{n+1}} \\ &= \left(x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}}\right) + \left(x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}\right). \end{aligned}$$

(1.b) Nous allons démontrer ce résultat par récurrence double.

- Le résultat est vrai pour $n = 1$ par hypothèse, et pour $n = 0$, on constate que :

$$x^0 + \frac{1}{x^0} = 1 + 1 = 2 \in \mathbb{Z}.$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que les nombres $x^n + \frac{1}{x^n}$ et $x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}$ soient entiers, et notons les respectivement a et b . D'après la question précédente,

$$x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}} = a \left(x + \frac{1}{x} \right) - b.$$

Comme a et $x + \frac{1}{x}$ sont entiers, c'est aussi le cas de leur produit, et comme b est entier, $x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}}$ est lui aussi entier.

- Par récurrence, $x^n + \frac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}$ pour tout entier naturel n .

(1.c) D'après la question précédente, il suffit de vérifier la propriété pour $n = 1$. Or

$$\frac{3 + \sqrt{5}}{2} + \frac{1}{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}} = \frac{(3 + \sqrt{5})^2 + 4}{2(3 + \sqrt{5})} = \frac{9 + 3\sqrt{5}}{3 + \sqrt{5}} = 3 \in \mathbb{Z}.$$

(2) (2.a) La fonction f est dérivable en tant que somme de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$$

d'où le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	$+$
f	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$+\infty$
			$-\infty$	$+\infty$	
				2	$+\infty$

(2.b) La fonction f est continue (c'est une somme de fonctions continues) et strictement croissante sur $[1, +\infty[$ donc établit une bijection de $[1, +\infty[$ sur l'intervalle $[f(1), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[= [2, +\infty[$. En particulier, tout entier relatif a exactement un antécédent dans l'intervalle $[1, +\infty[$, ce qui conduit bien à une infinité de réels non nuls x vérifiant $x + \frac{1}{x} \in \mathbb{Z}$.

Exercice 3

(1) (1.a) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On remarque que d'une part :

$$(f(x) - f(y))^2 = (x - y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy$$

et d'autre part,

$$\begin{aligned} (f(x) - f(y))^2 &= (f(x) - f(0) + f(0) - f(y))^2 \\ &= (\delta(x) - \delta(y))^2 \\ &= \delta(x)^2 + \delta(y)^2 - 2\delta(x)\delta(y) \\ &= x^2 + y^2 - 2\delta(x)\delta(y) \text{ (puisque } |\delta(x)| = |x| \text{ et de même pour } \delta(y)). \end{aligned}$$

Par suite, $\delta(xy) = xy$.

(1.b) La relation précédente étant valable quelles que soient les valeurs de x et y , on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}, \delta(x)\delta(1) = x.$$

Remarquons que $|\delta(1)| = 1 \neq 0$, et donc et donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{\delta(1)} + f(0).$$

De plus, $\delta(1) = \pm 1$, donc

il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x + \alpha$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -x + \alpha$.

(2) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

- Soit $f : x \mapsto x + \alpha$. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$|f(x) - f(y)| = |x + \alpha - y - \alpha| = |x - y|$$

donc f est bien une isométrie.

- Soit $f : x \mapsto -x + \alpha$. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$|f(x) - f(y)| = |-x + \alpha + y - \alpha| = |y - x| = |x - y|,$$

donc f est bien une isométrie.

- Les isométries sont les fonctions de la forme $x \mapsto x + \alpha$ et celles de la forme $x \mapsto -x + \alpha$ où α est un réel quelconque.