

Chapitre III Intégrer sur un intervalle

Table des matières

III.1	Intégrer une fonction continue par morceaux sur un segment.....	21
III.2	Qu'est-ce qu'une intégrale généralisée?.....	22
III.3	Intégrer les $\sim$, o et O	24
III.4	La convergence absolue	26
III.5	Intégrer par parties et changer de variable	27

III.1 INTÉGRER UNE FONCTION CONTINUE PAR MORCEAUX SUR UN SEGMENT

Se rappeler que :

1. Toute fonction f à valeurs dans $\mathbb{R}$ et continue sur un segment $[a, b]$ possède une intégrale $\int_a^b f(t) dt$.
2. Une fonction f est **continue par morceaux** sur un segment $[a, b]$ s'il existe une subdivision

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

de $[a, b]$ telle que, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la restriction de f à $]x_{i-1}, x_i[$ soit continue et admette des limites finies en x_{i-1} et en x_i . On dit alors que la subdivision du segment $[a, b]$ est adaptée à la fonction f .

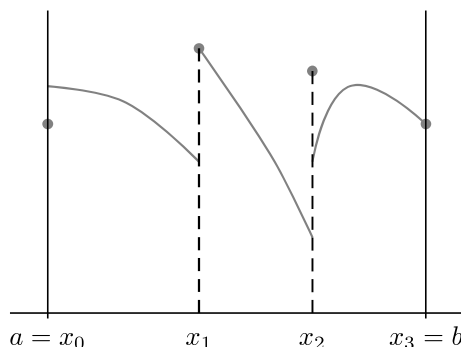


FIGURE III.1 – UN EXEMPLE DE FONCTION *cpm*

Autrement dit : la restriction de f à chacun des intervalles $]x_{i-1}, x_i[$ se prolonge en une fonction f_i continue sur le segment $[x_{i-1}, x_i]$.

3. On définit l'intégrale de la fonction f continue par morceaux sur le segment $[a, b]$ par :

$$\int_{[a,b]} f = \sum_{i=1}^n \int_{[x_{i-1}, x_i]} f_i,$$

chacune des intégrales de la somme étant l'intégrale d'une fonction continue sur un segment, ce qui nous ramène au point 1. Il existe plusieurs subdivisions adaptées à la même fonction f mais on vérifie, grâce à la relation de Chasles, que l'intégrale de f ne dépend pas du choix de la subdivision.

REMARQUE 1 (intégrale & primitive) — On dit qu'une fonction F est **une primitive** de f si F est dérivable et si f est la dérivée de F . Se rappeler le théorème suivant :

Si f est continue sur un intervalle I tel que $a \in I$, alors la fonction F définie, pour tout $x \in I$, par $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ est une primitive de f : F est dérivable et $\forall x \in I, F'(x) = f(x)$.

III.2 QU'EST-CE QU'UNE INTÉGRALE GÉNÉRALISÉE ?

DÉFINITION 2

Une fonction est *cpm* sur un intervalle I si elle est *cpm* sur chaque segment inclus dans I .

Si une fonction f est *cpm* sur un intervalle I , on peut ainsi l'intégrer sur tout segment inclus dans cet intervalle I . On va maintenant essayer d'intégrer f sur un intervalle plus général qu'un segment : $[a, b]$ ou $[a, b[$ ou $]a, b]$ ou $]a, b[$ ou $] - \infty, b]$ ou $] - \infty, b[$ ou $[a, +\infty[$ ou $]a, +\infty[$ ou $] - \infty, +\infty[$. On parle alors d'intégrale généralisée ou d'intégrale impropre. Par exemple,

$$I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int_{[0,1[} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt \quad \text{et} \quad J = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt = \int_{[1,+\infty[} \frac{1}{t^2} dt.$$

DÉFINITION 3

Soit f une fonction *cpm* sur un intervalle $[a, b[$, où $-\infty < a < b \leq +\infty$. Soit, pour chaque $x \in [a, b[$, $F(x) = \int_{[a,x]} f$. On dit que l'intégrale $I = \int_{[a,b[} f$ converge en b si la limite $\lim_{x \rightarrow b^-} F(x)$ existe et est finie. Sinon, on dit qu'elle diverge en b .

L'intégrale I est appelée une intégrale *généralisée en b* ou *impropre en b* . On définit de même si l'intégrale $\int_{]a,b]} f$ d'une fonction f *cpm* sur un intervalle $]a, b]$ (où $-\infty \leq a < b < +\infty$) converge ou diverge en a .

EXEMPLE 4 —

1. Pour tout $x \in [0, 1[$,

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \text{Arcsin}(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} \frac{\pi}{2}, \text{ donc l'intégrale } I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt, \text{ qui est impropre en } 1, \text{ converge et } I = \frac{\pi}{2}.$$

2. L'intégrale $\int_0^1 \ln(t) dt$ est convergente en 0.

Preuve — $\int_0^1 \ln(t) dt = \int_{]0,1]} \ln(t) dt$. On calcule, pour tout $x > 0$, $F(x) = \int_x^1 \ln(t) dt = [t \ln(t) - t]_x^1 = -1 - x \ln(x) + x$ et on étudie la limite de F en 0^+ : $F(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -1$, donc l'intégrale converge et est égale à -1 . $\square$

3. L'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{Kt} dt$ converge en $+\infty$ si, et seulement si, $K < 0$.

Preuve — On calcule, pour tout $x > 0$,

$$G(x) = \int_0^x e^{Kt} dt = \begin{cases} \frac{e^{Kx} - 1}{K} & \text{si } K \neq 0 \\ x & \text{si } K = 0 \end{cases}$$

et on étudie la limite de G en $+\infty$:

$$G(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \begin{cases} -1/K & \text{si } K < 0 \\ +\infty & \text{si } K \geq 0 \end{cases}.$$

□

REMARQUE 5 — Si f est cpm sur un intervalle $]a, b[$ (où $-\infty \leq a < b \leq +\infty$), alors on commence par choisir un $c \in]a, b[$ et on dit que : l'intégrale $\int_{]a, b[} f$ converge si, et seulement si, les deux intégrales $\int_{]a, c[} f$ et $\int_{]c, b[} f$ convergent. Dans ce cas, $\int_{]a, b[} f = \int_{]a, c[} f + \int_{]c, b[} f$. Ni la nature (convergente ou divergente) ni la valeur de l'intégrale ne dépendent du choix de c .

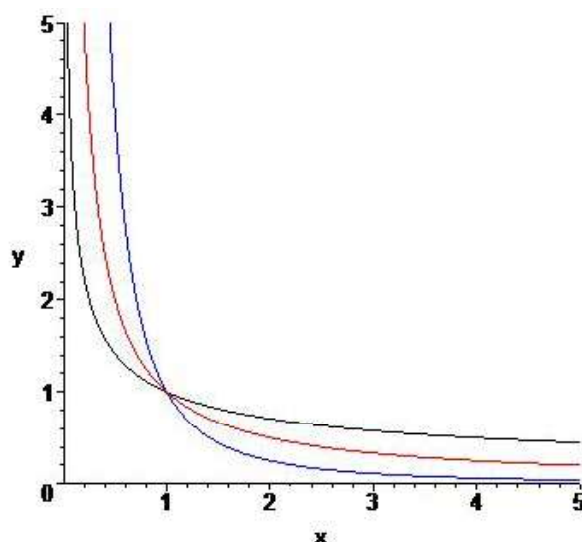


FIGURE III.2 – LES COURBES D'ÉQUATIONS $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{1}{x^2}$ ET $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$

EXERCICE 6 — Soit un réel α . Montrer que :

1. (critère de Riemann en $+\infty$) l'intégrale $\int_7^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge ssi $\alpha > 1$ (comme pour les séries) ;
2. (critère de Riemann en 0) l'intégrale $\int_0^{13} \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge ssi $\alpha < 1$;
3. l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ diverge pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

REMARQUE 7 — La divergence grossière des séries $\left(u_n \not\rightarrow 0 \implies \sum u_n \text{ diverge} \right)$ n'est pas valable pour les intégrales, comme le montre la fonction représentée sur la figure ci-dessous : cette fonction f est continue, $f(x) \not\rightarrow 0$ mais l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge. (Pourquoi ?)

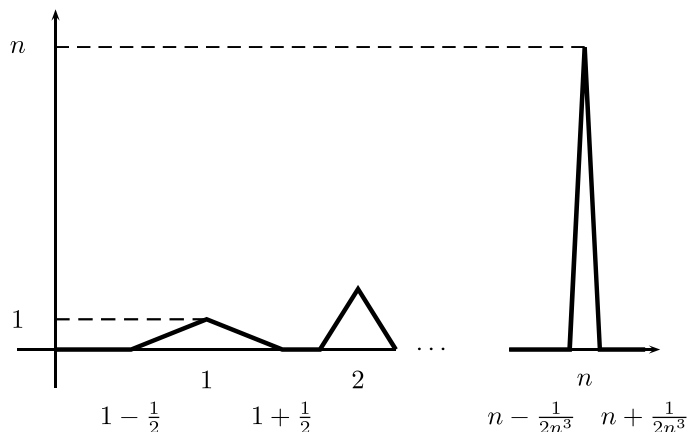


FIGURE III.3 – Pas de divergence grossière pour les intégrales généralisées

PROPOSITION 8 (intégrales faussement impropres)

Soient a et b deux réels. Si une fonction $f :]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue sur $]a, b]$ et possède une limite finie en a^+ , alors son intégrale $\int_a^b f$ converge en a .

Preuve — La fonction f possède un prolongement par continuité $\tilde{f} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto \begin{cases} f(t) & \text{si } t \neq a \\ \lim_{a^+} f & \text{si } t = a \end{cases}$.

Or, pour tout $x \in]a, b]$, $\int_x^b f(t) dt = \int_x^b \tilde{f}(t) dt = F(b) - F(x)$, où F est une primitive de $\tilde{f}$ sur $[a, b]$. Et $F(x) \xrightarrow{x \rightarrow a^+} F(a)$ car F est continue en a car dérivable en a , d'après la remarque 1. D'où $\int_x^b f(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow a^+} F(b) - F(a)$. Donc l'intégrale $\int_a^b f$ converge en a . $\square$

On dit alors que l'intégrale est *faussement impropre* en $a \in \mathbb{R}$. De même sur un intervalle du type $[a, b[$, une intégrale peut être faussement impropre en $b \in \mathbb{R}$.

Mais une intégrale ne sera jamais faussement impropre en $+\infty$ ni en $-\infty$.

EXEMPLE 9 — $\int_0^8 \frac{\sin t}{t} dt$ converge car elle est faussement impropre en 0. En effet, la fonction $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ est continue sur $]0, 8]$ et possède une limite finie en 0^+ : $\frac{\sin t}{t} \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 1$.

III.3 INTÉGRER LES $\sim$, o ET O

On va comparer deux **fonctions positives** sur un intervalle $[a, b[$ pour obtenir une conclusion sur leurs deux **intégrales**. De même, on comparait deux suites positives pour conclure sur les séries.

LEMME 10

Soit f une fonction *cpm* sur $[a, b[$ et positive : $\forall t \in [a, b[, 0 \leq f(t)$.

L'intégrale impropre $\int_{[a, b[} f$ converge si, et seulement si, la fonction $F : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est majorée.

Preuve — La fonction F est croissante car la fonction f est positive. D'où (théorème de la limite monotone) :

- la limite $\lim_{x \rightarrow b^-} F(x)$ existe ;
- cette limite est finie si, et seulement si, la fonction F est majorée.

□

THÉORÈME 11

 Soient f et g deux fonctions *cpm* sur $[a, b[$ telles que : $\forall t \in [a, b[, \quad 0 \leq f(t) \leq g(t)$.

1. Si l'intégrale $\int_{[a,b[} g$ converge, alors l'intégrale $\int_{[a,b[} f$ converge aussi et $\int_{[a,b[} f \leq \int_{[a,b[} g$.
2. Si l'intégrale $\int_{[a,b[} f$ diverge, alors l'intégrale $\int_{[a,b[} g$ diverge aussi.

Preuve —

1. Soient les deux fonctions F et G définies par :

$$\forall x \in [a, b[, \quad F(x) = \int_{[a,x]} f \quad \text{et} \quad G(x) = \int_{[a,x]} g.$$

 Si l'intégrale $\int_{[a,b[} g$ converge, alors (lemme 10) la fonction G est majorée. Or (croissance de l'intégrale sur un segment)

 $F \leq G$ car $f \leq g$. D'où la fonction F est aussi majorée, donc (lemme 10) l'intégrale $\int_{[a,b[} f$ converge.

 De plus, $\lim_{x \rightarrow b^-} F(x) \leq \lim_{x \rightarrow b^-} G(x)$ car $F \leq G$.

2. Par l'absurde.

□

PROPOSITION 12

 Soient f et g deux fonctions *cpm* sur $[a, b[$. On suppose que g est positive.

1. Si $f(t) = \underset{t \rightarrow b^-}{O}(g(t))$ alors $\begin{cases} \text{l'intégrale } \int_{[a,b[} g \text{ converge} \Rightarrow \text{l'intégrale } \int_{[a,b[} f \text{ converge} \\ \text{l'intégrale } \int_{[a,b[} f \text{ diverge} \Rightarrow \text{l'intégrale } \int_{[a,b[} g \text{ diverge} \end{cases}$.
2. De même si $f(t) = \underset{t \rightarrow b^-}{o}(g(t))$.
3. Si $f(t) \underset{t \rightarrow b^-}{\sim} g(t)$, alors les intégrales $\int_{[a,b[} f$ et $\int_{[a,b[} g$ sont de même nature.

Preuve —

1. Si $f(t) = \underset{t \rightarrow b^-}{O}(g(t))$, alors il existe $M > 0$ et $c \in [a, b[$ tels que $\forall t \in [c, b[, \quad f(t) \leq Mg(t)$. On conclut avec le théorème précédent que l'intégrale $\int_{[c,b[} f$ converge. Donc $\int_{[a,b[} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b[} f$ converge car (remarque ??2) les deux intégrales $\int_{[a,c]} f$ et $\int_{[c,b[} f$ convergent.
2. Une relation o est un cas particulier de relation O .
3. Si $f(t) \underset{t \rightarrow b^-}{\sim} g(t)$, alors $f(t) = \underset{t \rightarrow b^-}{O}(g(t))$ et $g(t) = \underset{t \rightarrow b^-}{O}(f(t))$.

□

EXEMPLE 13 — L'intégrale $K = \int_2^{+\infty} \frac{1}{t^2 + \cos t} dt$ est impropre en $+\infty$.

 Elle converge car $\frac{1}{t^2 + \cos t} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$ et l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge.

 Mieux : $\forall t \in [2, +\infty[, \quad \frac{1}{t^2 + \cos t} \leq \frac{1}{t^2 - 1}$. Or $\int_2^x \frac{1}{t^2 - 1} dt = \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{t-1}{t+1} \right) \right]_2^x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \ln 3$. Donc l'intégrale K converge et $K \leq \frac{1}{2} \ln 3$.

EXERCICE 14 — 1. Quelle est la nature des intégrales

$$\int_0^1 \frac{\sin t}{t^2} dt \quad \text{et} \quad \int_1^{+\infty} \sin \left(\frac{1}{t} \right) dt ?$$

2. Quelle est l'erreur dans le raisonnement suivant ?

$$\ll \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt \text{ diverge car : } \frac{1}{1+t^2} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^2} \text{ et } \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt \text{ diverge.} \gg$$

La proposition suivante est aux intégrales généralisées ce qu'est le lemme I.13 aux séries : elle étudie « l'intégrale partielle » $\int_a^x f(t) dt$ et « le reste » $\int_x^b f(t) dt$ d'une intégrale généralisée $\int_{[a,b[} f(t) dt$.

PROPOSITION 15

Soient f et g deux fonctions *cpm* sur $[a, b[$. On suppose que la fonction g est positive.

1. Si $f(t) = O_{t \rightarrow b^-}(g(t))$ et $\int_{[a,b[} g(t) dt$ cv, alors $\int_{[a,b[} f(t) dt$ cv absolument et $\int_x^b f(t) dt = O_{x \rightarrow b^-} \left(\int_x^b g(t) dt \right)$.
2. Si $f(t) = O_{t \rightarrow b^-}(g(t))$ et $\int_{[a,b[} g(t) dt$ diverge, alors $\int_a^x f(t) dt = O_{x \rightarrow b^-} \left(\int_a^x g(t) dt \right)$.
3. De même en remplaçant O par o ou par $\sim$.

De même sur d'autres types d'intervalles.

Preuve — On procède comme pour le lemme 13 du chapitre I. □

EXERCICE 16 — Montrer que $\int_x^1 \frac{1}{\ln(1+t)} dt \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} -\ln(x)$.

III.4 LA CONVERGENCE ABSOLUE

THÉORÈME 17

Soit f une fonction *cpm* sur $[a, b[$.

Si l'intégrale $\int_{[a,b[} |f|$ converge, alors l'intégrale $\int_{[a,b[} f$ converge aussi et

$$\left| \int_{[a,b[} f \right| \leq \int_{[a,b[} |f| \quad (\text{inégalité triangulaire}).$$

De même sur d'autres types d'intervalles.

Preuve — Pour tout $t \in [a, b[$, $f(t) = \frac{|f(t)| + f(t)}{2} - \frac{|f(t)| - f(t)}{2}$.

La première fonction $g : t \mapsto \frac{|f(t)| + f(t)}{2}$ est positive et son intégrale $\int_{[a,b[} g$ converge car (théorème 11)

$$0 \leq g(t) \leq |f(t)| \quad \text{et l'intégrale } \int_{[a,b[} |f| \text{ converge.}$$

La deuxième fonction $h : t \mapsto \frac{|f(t)| - f(t)}{2}$ est positive et son intégrale $\int_{[a,b[} h$ converge car (théorème 11)

$$0 \leq h(t) \leq |f(t)| \quad \text{et l'intégrale } \int_{[a,b[} |f| \text{ converge.}$$

Donc l'intégrale $\int_{[a,b[} |f|$ converge car c'est la somme de deux intégrales convergentes.

Reste à prouver l'inégalité triangulaire, c'est-à-dire à montrer que : $-\int_{[a,b[} |f| \leq \int_{[a,x]} f \leq \int_{[a,b[} |f|$. On remarque que, pour tout $x \in [a, b[$,

$$\left| \int_{[a,x]} f \right| \leq \int_{[a,x]} |f| \quad (*)$$

car : $\forall t \in [a, x]$, $-|f(t)| \leq f(t) \leq |f(t)|$ et l'intégrale sur un segment est croissante. Les inégalités larges passent à la limite $x \rightarrow b^-$. Or $\int_{[a,x]} |f| \xrightarrow{x \rightarrow b^-} \int_{[a,b[} |f|$ car l'intégrale $\int_{[a,b[} |f|$ converge (par hypothèse). Et $\int_{[a,x]} f \xrightarrow{x \rightarrow b^-} \int_{[a,b[} f$ car l'intégrale $\int_{[a,b[} f$ converge (on vient de le prouver). $\square$

On dit alors que l'intégrale $\int_{[a,b[} f$ **converge absolument** (ou encore que la fonction f est **intégrable** sur $[a, b[$) et le théorème dit donc que :

$$\int_{[a,b[} f \text{ converge absolument} \Rightarrow \int_{[a,b[} f \text{ converge.}$$

La réciproque est fautive : l'exercice 20 et la remarque 21 le montreront.

EXERCICE 18 — Quelle est la nature des intégrales $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2} dt$ et $\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt$?

III.5 INTÉGRER PAR PARTIES ET CHANGER DE VARIABLE

PROPOSITION 19

Soient f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b[$. Si la limite $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)g(x)$ existe et est finie, alors :

1. les intégrales $\int_{[a,b[} fg'$ et $\int_{[a,b[} f'g$ sont de même nature ;
2. si ces intégrales convergent, alors

$$\int_{[a,b[} fg' = \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)g(x) - f(a)g(a) - \int_{[a,b[} f'g.$$

De même sur d'autres types d'intervalles.

Preuve — Soit $x \in [a, b[$. On intègre par parties sur le segment $[a, x]$:

$$\int_a^x f(t)g'(t) dt = f(x)g(x) - f(a)g(a) - \int_a^x f'(t)g(t) dt.$$

Puis on passe à la limite $x \rightarrow b^-$. $\square$

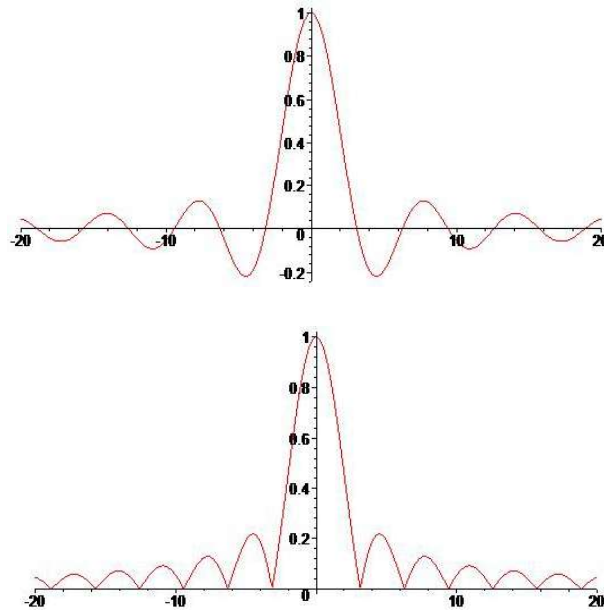
EXERCICE 20 — Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ converge.

REMARQUE 21 — L'intégrale $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ ne converge pas absolument car l'intégrale $\int_{\pi}^{+\infty} \left| \frac{\sin t}{t} \right| dt$ diverge. En effet, soit un entier $n \geq 2$:

$$\int_{\pi}^{n\pi} \left| \frac{\sin t}{t} \right| dt = \sum_{k=2}^n \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \left| \frac{\sin t}{t} \right| dt.$$

Or, pour chaque $k \geq 2$,

$$\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \left| \frac{\sin t}{t} \right| dt \geq \frac{1}{k\pi} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin t| dt = \frac{1}{k\pi} \int_0^{\pi} \sin t dt = \frac{2}{k\pi}.$$

FIGURE III.4 – LES COURBES D'ÉQUATIONS $y = \frac{\sin(x)}{x}$ ET $y = \left| \frac{\sin(x)}{x} \right|$

Donc

$$\int_{\pi}^{n\pi} \left| \frac{\sin t}{t} \right| dt \geq \sum_{k=2}^n \frac{2}{k\pi} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty.$$

PROPOSITION 22

Soit φ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ strictement croissante sur $[\alpha, \beta[$, soient $a = \varphi(\alpha)$ et $b = \lim_{x \rightarrow \beta^-} \varphi(x)$. Si f est cpm sur $[a, b[$, alors :

1. les intégrales $\int_a^b f(t) dt$ et $\int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(u)] \varphi'(u) du$ sont de même nature ;
2. si ces intégrales convergent, alors

$$\int_a^b f(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(u)] \cdot \varphi'(u) du.$$

De même si φ est strictement décroissante ou sur d'autres types d'intervalles.

Preuve — Soit $x \in [\alpha, \beta[$: $\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(x)} f(t) dt = \int_{\alpha}^x f[\varphi(u)] \varphi'(u) du$ car la fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$. Puis on passe à la limite $x \rightarrow \beta^-$: si l'intégrale $\int_{\alpha}^{\beta} (f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ converge, alors l'intégrale $\int_a^b f$ aussi. Et elles sont égales (par égalité des limites). Réciproquement : la fonction φ est bijective de $[\alpha, \beta[$ vers $[a, b[$ car elle est strictement monotone et continue. Soit $y \in [a, b[$: $\int_a^y f(t) dt = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(y)} f[\varphi(u)] \varphi'(u) du$. Puis on passe à la limite $y \rightarrow b^-$ en utilisant que la réciproque φ^{-1} est continue : si l'intégrale $\int_a^b f$ converge, alors l'intégrale $\int_{\alpha}^{\beta} (f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ aussi. Les deux intégrales sont donc de même nature. $\square$

EXERCICE 23 — Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{ch} t} dt$ converge et que sa valeur est $\frac{\pi}{2}$.