

C O L L E N° 0 1

S é r i e s n u m é r i q u e s

Exercice 1 (règle de Raab-Duhamel). Soit (u_n) une suite strictement positive.

On suppose qu'il existe un réel α tel que : $\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{\alpha}{n}$.

1. Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \frac{1}{n}$. Montrer que : $\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1-\alpha}{n}$.
2. On suppose que $\alpha < 1$. En déduire qu'il existe un rang N tel que : $\forall n \geq N$, $nu_n \geq Nu_N$. Puis montrer que la série $\sum u_n$ diverge.
3. Soit $u_n = \sqrt{n!} \times \prod_{k=1}^n \sin \frac{1}{\sqrt{k}}$ pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la nature de la série $\sum u_n$.

Exercice 2. Soit la suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par

$$u_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+3} + \cdots + \frac{1}{4n-1} = \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{2k+1}.$$

1. Montrer que $u_{n+1} - u_n \sim \frac{1}{32n^3}$. En déduire que la suite (u_n) converge.
2. Montrer que sa limite vaut $\ell = \frac{\ln(2)}{2}$.
3. Montrer que $\ell - u_n \sim \frac{1}{64n^2}$.

Exercice 3. Montrer que la série $\sum (-1)^n \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ est convergente et que, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=1}^{2p+1} (-1)^n \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 2 \ln u_p, \text{ où } u_p = \frac{(2p+1)!}{2^{2p} p!^2 \sqrt{2p+2}}.$$

En utilisant la formule de Stirling, déterminer un équivalent de u_p et en déduire que

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln 2 - \ln \pi.$$