

b. On réécrit les mêmes suppositions qu'à la a.

D'où, $\forall x \in \mathbb{R},$
$$\sum_{h=1}^n \lambda_h \delta_h(x) = 0$$

En factorisant par e^{a_n} (le facteur prépondérant)

$$\lambda_1 e^{(a_1 - a_n)x} + \lambda_2 e^{(a_2 - a_n)x} + \dots + \lambda_{n-1} e^{(a_{n-1} - a_n)x} = 0$$

D'où, quand x tend vers $+\infty$:

$$\lambda_n = 0$$

~~On, $e^{ax} > 0 \forall x \in \mathbb{R}$ donc $\lambda_n = 0$.~~

On répète cela n fois*, nous montrant que $\forall h \in \{1, \dots, n\}, \lambda_h = 0$

Donc les fonctions sont linéairement indépendantes.

* donc avec $\lambda_n, \lambda_{n-1}, \dots, \lambda_0$

Exercice 10.11: Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $(a'_{ij}) = A^T$

1) On pose $(t_{ij}) = T = A^T \cdot A$

$$\begin{aligned} t_{ij} &= \sum_{k=1}^n a_{ik} a_{jk} \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ik} a_{kj} \\ t_{ij} &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n a_{kj}^2 \end{aligned}$$

2) On suppose $A^T \cdot A = 0$

$$\text{Donc } t_{ij} = 0$$

$$\text{Donc } \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{kj}^2 = 0 \quad \text{Donc } \forall (i,j) \in [1;n]^2, a_{ij} = 0 \quad \text{Donc } A = 0$$

$$\text{Si } A = 0 \text{ alors } A^T \cdot A = 0$$

$$\text{Donc } A^T \cdot A = 0 \Leftrightarrow A = 0$$

3) Montrer $\text{Ker}(A) = \text{Ker}(A^T \cdot A)$

$$\text{Soit } X \in \text{Ker}(A) \text{ Donc } AX = 0 \text{ Donc } A^T \cdot AX = 0 \text{ Donc } X \in \text{Ker}(A^T \cdot A)$$

$$\text{Soit } X \in \text{Ker}(A^T \cdot A) \text{ Donc } A^T \cdot A \cdot X = 0$$

$$\text{Donc } X^T A^T A X = 0 \text{ Donc } (AX)^T AX = 0 \text{ Donc } AX = 0 \text{ d'après 2}$$

$$\text{Donc } X \in \text{Ker}(A)$$

La q. 2 vient par une matrice carrée. Or AX est une matrice colonne.

4) Soit $\tau_A : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, $M \mapsto t_{ii} = \sum_{j=1}^n a_{ji}^2$

$$A^T \cdot E_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } t_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ki}^2$$

Méthode 1: Si A est nulle alors $\tau_A = 0$. Si $\tau_A = 0$ alors $\tau_A(E_{ij}) = 0 \quad \forall i, j \in [1;n]$ donc $\forall (i,j) \in [1;n]^2, a_{ij} = 0$ Donc $A = 0$

Méthode 2: Si A est nulle alors $\tau_A = 0$. Si $\tau_A = 0$ alors $\tau_A(A) = 0$

$$\text{Donc } t_{ii} = 0 \text{ Donc } A = 0 \text{ d'après la q. 2}$$

$$\text{Ainsi } \tau_A = 0 \Leftrightarrow A = 0$$

Par l'absurde: On suppose que

$\exists \lambda \in \mathbb{R}, U = \lambda V$ ou $V = \lambda U$

def. de la
linéarité.

donc $X = (I + iA)U$.

Donc $A(I + iA)U = 0$

donc $AU = -iU$.

Or, $AU \in \mathcal{L}_{n,n}(\mathbb{R})$

$AU \in \mathcal{L}_{n,n}(\mathbb{C})$

donc $AU = -iU = 0$ car $\mathcal{L}_{n,n}(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}_{n,n}(\mathbb{C}) = \{0\}$
ou $\mathbb{R} \cap i\mathbb{R} = \{0\}$

Donc $X = 0$: une contradiction.

Donc U et V sont libres.

Ainsi, $\left\{ \begin{array}{l} \text{il existe bien } U \text{ et } V \text{ dans } \mathcal{L}_{n,n}(\mathbb{R}) \text{ tels que} \\ \left\{ \begin{array}{l} AU = -iV \\ AV = U \end{array} \right. \end{array} \right.$

Supposons $(A - iI_n)$ non-inversible

Soit f l'endomorphisme associé à $A - iI_n$.

$\ker(f) \neq \{0\}$ car $f: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$

Donc il existe $x \in \ker(f)$ tq $\begin{cases} f(x) = 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$

Soit B la base canonique de $\mathbb{C}^n$.

3. [Soit $n \in \mathbb{N}$.

Soit $P \in K_n[X]$

✓ Puisque $\deg(P) > \deg(P')$, $\exists$ ya égalité si $P=0$

$$\deg(P+P') \leq \deg(P)$$

D'où $P+P' = f(P) \in K_n[X]$

Ainsi, $K_n[X]$ est stable par f .

Note que f prouve aussi la stabilité de $K_n[X]$.

$$K_n[X] = \text{Vect}(1, x, x^2, \dots, x^n)$$

$$\text{On pose } B = (1, x, x^2, \dots, x^n)$$

$$f(1) = 0 \text{ et}$$

$$\forall k \in [1, n], f(x^k) = x^k + kx^{k-1}$$

✓

D'où:

$$[f]_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\begin{matrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{matrix}$

$\begin{matrix} f(1) & f(x) & f(x^2) & f(x^3) & \dots & f(x^n) \end{matrix}$

2. Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tq $P = \sum_{i=0}^2 a_i X^i$

f n'est pas injective $\Leftrightarrow \text{Ker } f \neq \{0\}$

Or, $P \in \text{Ker } f \Leftrightarrow$

$$f(P) = 0 \Leftrightarrow \left(\int_{-1}^1 P(t) dt, P(x_0), P(-x_0) \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_{-1}^1 P(t) dt = 0$$

$$\begin{cases} P(x_0) = 0 \\ P(-x_0) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \int_{-1}^1 \left[a_0 t + \frac{a_1}{2} t^2 + \frac{a_2}{3} t^3 \right] dt = 0$$

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 = 0 \\ a_0 - a_1 x_0 + a_2 x_0^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} = (-a_0 + \frac{a_1}{2} - \frac{a_2}{3}) \\ a_0 + a_2 x_0^2 = 0 \\ a_1 x_0 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a_0 + \frac{2a_2}{3} = 0 \\ a_0 + a_2 x_0^2 = 0 \\ a_1 x_0 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = -\frac{a_2}{3} \\ a_0(1-3x_0^2) = 0 \\ a_1 x_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = a_2 = 0 \text{ ou } x_0 = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \\ a_1 = 0 \text{ ou } x_0 = 0 \end{cases}$$

Ainsi:

$$f \text{ n'est pas injective} \Leftrightarrow x_0 \in \left\{ 0, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right\}$$

De plus,

• si $x_0 = 0$ alors $\text{Ker } f = \{ \alpha(1-3x^2) \mid \alpha \in \mathbb{R} \}$ dont une base est $(1-3x^2)$

• si $x_0 = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ alors $\text{Ker } f = \{ \beta x \mid \beta \in \mathbb{R} \}$ dont une base est (x)