

1 Moyennes arithmétique et harmonique

Soient $u_0 > 0$ et $v_0 > 0$. On définit deux suites par les relations, valables pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n}$$

La première est la moyenne *arithmétique* des deux termes précédents, la seconde leur moyenne *harmonique*, c'est-à-dire l'inverse de la moyenne des inverses. On vérifiera au passage que les deux suites restent strictement positives, ce qui garantit que tout est bien défini.

1. Montrer que la suite $(u_n v_n)$ est constante.

Une récurrence immédiate montre d'abord que les deux suites sont à termes strictement positifs : si $u_n > 0$ et $v_n > 0$, alors $u_{n+1} > 0$ comme moyenne de deux réels positifs, et $v_{n+1} > 0$ comme quotient de deux réels strictement positifs.

Le calcul du produit est alors immédiat, les dénominateurs se simplifiant :

$$u_{n+1} v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \times \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} = u_n v_n$$

La suite $(u_n v_n)$ est donc constante, égale à $u_0 v_0$.

Remarque

Une quantité conservée par la récurrence s'appelle un *invariant*, et c'est presque toujours ce qu'il faut chercher en premier devant un système de deux suites couplées. Ici l'invariant donnera directement la valeur de la limite, sans qu'on ait à résoudre quoi que ce soit.

2. Montrer que $u_n \geq v_n$ pour tout $n \geq 1$, puis que $(u_n)_{n \geq 1}$ est décroissante et $(v_n)_{n \geq 1}$ croissante.

Comparaison. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculons la différence en réduisant au même dénominateur :

$$u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} - \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} = \frac{(u_n + v_n)^2 - 4u_n v_n}{2(u_n + v_n)} = \frac{(u_n - v_n)^2}{2(u_n + v_n)}$$

Le numérateur est un carré, donc positif, et le dénominateur est strictement positif (récurrence). On a donc $u_{n+1} \geq v_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire $u_n \geq v_n$ pour tout $n \geq 1$.

Monotonies. Soit $n \geq 1$. Comme $v_n \leq u_n$:

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \leq \frac{u_n + u_n}{2} = u_n$$

donc $(u_n)_{n \geq 1}$ est décroissante. De même :

$$v_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} \geq \frac{2v_n v_n}{u_n + v_n} \quad \text{et} \quad v_{n+1} - v_n = \frac{2u_n v_n - v_n(u_n + v_n)}{u_n + v_n} = \frac{v_n(u_n - v_n)}{u_n + v_n} \geq 0$$

donc $(v_n)_{n \geq 1}$ est croissante.

3. En déduire que les deux suites convergent vers une même limite, que l'on précisera.

Convergence. Pour $n \geq 1$, la suite (u_n) est décroissante et minorée par v_1 , puisque $u_n \geq v_n \geq v_1$: elle converge donc vers un réel ℓ . De même, (v_n) est croissante et majorée par u_1 , donc converge vers un réel ℓ' .

Égalité des limites. Passons à la limite dans la relation $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$, ce qui est licite puisque les deux suites convergent :

$$\ell = \frac{\ell + \ell'}{2} \quad \text{donc} \quad 2\ell = \ell + \ell' \quad \text{donc} \quad \ell = \ell'$$

Valeur commune. C'est ici que l'invariant de la question 1 intervient. En passant à la limite dans $u_n v_n = u_0 v_0$, il vient $\ell^2 = u_0 v_0$. Comme $\ell \geq v_1 > 0$, on conclut :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \sqrt{u_0 v_0}$$

La limite commune est donc la moyenne *géométrique* des deux valeurs initiales.

Remarque

Le résultat mérite d'être retenu tel quel : itérer moyenne arithmétique et moyenne harmonique fait converger vers la moyenne géométrique, laquelle est justement située entre les deux. Si l'on remplace la moyenne harmonique par la moyenne géométrique elle-même, on obtient la *moyenne arithmético-géométrique* de Gauss, dont la limite n'a en revanche aucune expression élémentaire.

2 Lien entre deux séries via l'inégalité arithmético-géométrique

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. On pose $v_n = \frac{1}{1+n^2 u_n}$. Montrer que si la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge, alors la série $\sum_{n \geq 0} v_n$ diverge.

L'idée est de raisonner par l'absurde en supposant les deux séries convergentes, pour obtenir, via l'inégalité arithmético-géométrique, une contradiction entre la convergence et la divergence d'une même troisième série, celle de terme général $\sqrt{u_n v_n}$.

Supposons par l'absurde que $\sum v_n$ converge également (en plus de $\sum u_n$, convergente par hypothèse). Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n (1 + n^2 u_n) = 1$, on a :

$$v_n + n^2 u_n v_n = 1 \quad \text{soit} \quad u_n v_n = \frac{1 - v_n}{n^2}$$

Or la convergence supposée de $\sum v_n$ entraîne $v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc $1 - v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$, et par conséquent :

$$u_n v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$$

En prenant la racine carrée (fonction continue, croissante, préservant les équivalents entre suites positives) :

$$\sqrt{u_n v_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

Par théorème d'équivalence pour les séries à termes positifs, couplé au critère de Riemann (la série harmonique diverge), on en déduit que $\sum \sqrt{u_n v_n}$ diverge.

Mais d'autre part, l'inégalité arithmético-géométrique donne, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sqrt{u_n v_n} \leq \frac{u_n + v_n}{2}$$

Or $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent toutes deux (par hypothèse et par supposition de l'absurde), donc $\sum \frac{u_n + v_n}{2}$ converge également, par combinaison linéaire de séries convergentes. Le critère de majoration pour les séries à termes positifs donne alors la convergence de $\sum \sqrt{u_n v_n}$.

On obtient ainsi à la fois la convergence et la divergence de $\sum \sqrt{u_n v_n}$, ce qui est absurde. Cette contradiction montre que l'hypothèse de convergence de $\sum v_n$ était fautive : si $\sum u_n$ converge, alors $\sum v_n$ diverge nécessairement.

3 Série alternée liée à la série harmonique

Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 2} u_n$, où :

$$u_n = \frac{(-1)^n \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}}{\ln(n!)}$$

Rappel : par comparaison série-intégrale, $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$.

L'idée est d'appliquer le critère de Leibniz aux séries alternées, ce qui demande de vérifier trois points : le caractère alterné, la limite nulle du terme général, et sa décroissance en valeur absolue à partir d'un certain rang. Notons, pour $n \geq 1$, $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

Caractère alterné. Le facteur $(-1)^n$ assure immédiatement que $\sum u_n$ est une série alternée.

Limite nulle. En développant le logarithme d'une factorielle en somme, puis en le comparant à une intégrale (comme au rappel de l'énoncé, mais pour la fonction $\ln$) :

$$\ln(n!) = \sum_{k=1}^n \ln(k) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n \ln(n)$$

En combinant avec le rappel de l'énoncé, $|u_n| = \frac{H_n}{\ln(n!)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n \ln(n)} = \frac{1}{n}$, si bien que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Décroissance en valeur absolue. Montrons que $(|u_n|)$ est décroissante à partir d'un certain rang. On calcule, pour $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} |u_{n+1}| - |u_n| &= \frac{H_{n+1}}{\ln((n+1)!)} - \frac{H_n}{\ln(n!)} \\ &= \frac{A_n}{\ln(n!) \ln((n+1)!)} \end{aligned}$$

où l'on a posé, en utilisant $H_{n+1} = H_n + \frac{1}{n+1}$ et $\ln((n+1)!) = \ln(n!) + \ln(n+1)$:

$$\begin{aligned} A_n &= H_{n+1} \ln(n!) - H_n \ln((n+1)!) \\ &= \left(H_n + \frac{1}{n+1}\right) \ln(n!) - H_n (\ln(n!) + \ln(n+1)) \\ &= \frac{1}{n+1} \ln(n!) - H_n \ln(n+1) \end{aligned}$$

Or $\frac{1}{n+1} \ln(n!) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n \ln(n)}{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$, tandis que $H_n \ln(n+1) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n) \times \ln(n) = \ln^2(n)$. Comme $\ln^2(n)$ domine strictement $\ln(n)$ au voisinage de $+\infty$, on en déduit :

$$A_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\ln^2(n)$$

En particulier, A_n est strictement négatif à partir d'un certain rang, ce qui donne $|u_{n+1}| < |u_n|$ à partir de ce même rang (le dénominateur $\ln(n!) \ln((n+1)!)$ étant positif) : la suite $(|u_n|)$ est donc décroissante à partir d'un certain rang.

Conclusion. Les trois hypothèses du critère de Leibniz étant vérifiées (à partir d'un certain rang, ce qui suffit pour conclure sur la nature de la série), la série $\sum_{n \geq 2} u_n$ converge.

4 Séries associées à l'itération du sinus

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in]0, \frac{\pi}{2}[$ et $u_{n+1} = \sin(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que la suite (u_n) est bien définie, qu'elle converge, et déterminer sa limite.

Bonne définition et stabilité. L'intervalle $]0, \frac{\pi}{2}[$ est stable par la fonction sinus. En effet, si $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, alors $\sin(x) \in]0, 1[$, et $1 < \frac{\pi}{2}$. Une récurrence immédiate montre donc que u_n est défini et appartient à $]0, \frac{\pi}{2}[$ pour tout n .

Monotonie. Posons $g(x) = \sin(x) - x$ sur $]0, \frac{\pi}{2}[$. Sa dérivée $g'(x) = \cos(x) - 1$ est strictement négative sur cet intervalle, donc g y est strictement décroissante ; comme $g(0) = 0$, on en déduit $g < 0$, c'est-à-dire :

$$\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[, \quad \sin(x) < x$$

Appliquée à $x = u_n$, cette inégalité donne $u_{n+1} < u_n$: la suite est strictement décroissante.

Convergence. Décroissante et minorée par 0, la suite converge vers un réel $l \geq 0$. La fonction sinus étant continue, le passage à la limite dans la relation de récurrence donne $l = \sin(l)$. Or l'inégalité ci-dessus montre que $\sin(x) < x$ pour $x > 0$: la seule solution positive de $l = \sin(l)$ est $l = 0$.

La suite (u_n) décroît donc strictement vers 0, en restant strictement positive. C'est ce dernier point qui rendra licites les manipulations de logarithmes à la question 3.

2. Montrer que la série $\sum u_n^3$ converge. On pourra étudier $u_{n+1} - u_n$.

L'idée est de comparer u_n^3 à une quantité *télescopique*, dont on sait sommer les termes. L'indication suggère de regarder l'écart entre deux termes consécutifs, et le développement limité du sinus va montrer que cet écart est précisément d'ordre u_n^3 .

Le développement limité usuel $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ au voisinage de 0 donne $\sin(x) - x \sim -\frac{x^3}{6}$. Comme $u_n \rightarrow 0$ d'après la question 1, on peut l'appliquer en $x = u_n$:

$$u_n - u_{n+1} = u_n - \sin(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{u_n^3}{6}$$

Autrement dit $u_n^3 \sim 6(u_n - u_{n+1})$. Les deux suites en présence sont à termes strictement positifs, la seconde parce que la suite est strictement décroissante : on peut donc appliquer le théorème de comparaison des séries à termes positifs, et les deux séries sont de même nature.

Or la série $\sum (u_n - u_{n+1})$ est télescopique. Sa somme partielle vaut :

$$\sum_{n=0}^N (u_n - u_{n+1}) = u_0 - u_{N+1} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} u_0$$

puisque $u_{N+1} \rightarrow 0$. Cette série converge donc, et par comparaison la série $\sum u_n^3$ converge également.

Remarque

On obtient même la somme au facteur près : $\sum_{n \geq 0} u_n^3$ n'est pas égale à $6u_0$, l'équivalence entre termes généraux ne se transmettant pas aux sommes. Seule la *nature* est préservée.

3. Étudier la nature de la série $\sum u_n^2$. On pourra étudier $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$.

Le même principe s'applique, mais avec une quantité télescopique différente : c'est cette fois la série des écarts de *logarithmes* qui va servir de comparaison, et elle diverge.

Les termes u_n étant strictement positifs, les logarithmes ont un sens. Écrivons :

$$\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = \ln\left(\frac{\sin(u_n)}{u_n}\right)$$

Le développement $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ donne $\frac{\sin(x)}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)$, puis, avec $\ln(1+h) \sim h$:

$$\ln(u_n) - \ln(u_{n+1}) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{u_n^2}{6}$$

Autrement dit $u_n^2 \sim 6(\ln(u_n) - \ln(u_{n+1}))$. Les deux suites sont à termes strictement positifs — la seconde parce que $u_{n+1} < u_n$ et que le logarithme est croissant — et le théorème de comparaison des séries à termes positifs s'applique de nouveau.

La série $\sum (\ln(u_n) - \ln(u_{n+1}))$ est encore télescopique, mais son comportement est cette fois tout autre :

$$\sum_{n=0}^N (\ln(u_n) - \ln(u_{n+1})) = \ln(u_0) - \ln(u_{N+1})$$

Comme u_{N+1} tend vers 0 par valeurs strictement positives, $\ln(u_{N+1})$ tend vers $-\infty$, donc la somme partielle tend

vers $+\infty$. Cette série diverge.

Par comparaison, la série $\sum u_n^2$ **diverge**.

Remarque

Les deux questions se complètent et suggèrent un équivalent de u_n . La même méthode appliquée à $\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2}$ montre que cette différence tend vers $\frac{1}{3}$; le théorème de Cesàro donne alors $\frac{1}{u_n^2} \sim \frac{n}{3}$, c'est-à-dire :

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{3}{n}}$$

On vérifie la cohérence : $u_n^2 \sim \frac{3}{n}$ donne une série divergente, et $u_n^3 \sim \frac{3\sqrt{3}}{n^{3/2}}$ une série convergente, conformément aux deux questions. L'exercice est donc une manière d'obtenir les natures sans passer par l'équivalent, qui est plus coûteux à établir.

5 Comparaison série-intégrale à deux étages

Déterminer la nature de la série de terme général :

$$u_n = \left(\sum_{k=2}^n \ln^2(k) \right)^{-1}$$

L'idée est d'évaluer d'abord un équivalent de la somme $\sum_{k=2}^n \ln^2(k)$ par comparaison série-intégrale, puis d'étudier la nature de la série de terme général équivalent obtenu par une seconde comparaison série-intégrale.

Étape 1 : équivalent de la somme. La fonction $x \mapsto \ln^2(x)$ est continue et croissante sur $[2, +\infty[$, donc, par comparaison série-intégrale usuelle, pour tout $n \geq 2$:

$$\ln^2(2) + \int_2^n \ln^2(x) dx \leq \sum_{k=2}^n \ln^2(k) \leq \int_2^{n+1} \ln^2(x) dx$$

On calcule cette primitive par intégrations par parties successives :

$$\begin{aligned} \int_2^n \ln^2(x) dx &= \left[x \ln^2(x) \right]_2^n - 2 \int_2^n \ln(x) dx \\ &= n \ln^2(n) - 2 \ln^2(2) - 2 \left[x \ln(x) - x \right]_2^n \\ &= n \ln^2(n) - 2n \ln(n) + 2n - 2 \ln^2(2) + 4 \ln(2) - 4 \end{aligned}$$

Le terme dominant étant $n \ln^2(n)$ (les autres sont négligeables devant lui), on a :

$$\int_2^n \ln^2(x) dx \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n \ln^2(n)$$

et de même, en remplaçant n par $n+1$:

$$\int_2^{n+1} \ln^2(x) dx \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} (n+1) \ln^2(n+1) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n \ln^2(n)$$

(la dernière équivalence provenant de $n+1 \sim n$ et $\ln(n+1) \sim \ln(n)$). Par théorème d'encadrement entre deux quantités équivalentes, on en déduit :

$$\sum_{k=2}^n \ln^2(k) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n \ln^2(n)$$

et donc, par passage à l'inverse de suites strictement positives :

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n \ln^2(n)}$$

Étape 2 : nature de $\sum \frac{1}{n \ln^2(n)}$. Il reste à étudier cette nouvelle série, par une seconde comparaison série-intégrale. Posons $f : x \mapsto \frac{1}{x \ln^2(x)}$, fonction continue, positive et décroissante sur $[2, +\infty[$, comme produit des deux fonctions positives décroissantes $x \mapsto \frac{1}{x}$ et $x \mapsto \frac{1}{\ln^2(x)}$.

Soit $k \geq 3$ un entier. Pour tout $x \in [k-1, k]$, la décroissance de f donne $f(k) \leq f(x)$, et en intégrant sur cet intervalle de longueur 1 :

$$\frac{1}{k \ln^2(k)} \leq \int_{k-1}^k \frac{dx}{x \ln^2(x)}$$

En sommant ces inégalités pour k allant de 3 à n , la relation de Chasles donne, pour tout $n \geq 3$:

$$\sum_{k=3}^n \frac{1}{k \ln^2(k)} \leq \int_2^n \frac{dx}{x \ln^2(x)}$$

Cette intégrale se calcule directement : l'intégrande est de la forme $\frac{u'}{u^2}$ avec $u = \ln$, dont une primitive est $-\frac{1}{u}$. Ainsi :

$$\int_2^n \frac{dx}{x \ln^2(x)} = \left[-\frac{1}{\ln(x)} \right]_2^n = \frac{1}{\ln(2)} - \frac{1}{\ln(n)} \leq \frac{1}{\ln(2)}$$

Les sommes partielles de la série à termes positifs $\sum \frac{1}{n \ln^2(n)}$ sont donc majorées, par $\frac{1}{2 \ln^2(2)} + \frac{1}{\ln(2)}$: cette série converge.

Conclusion. Par théorème d'équivalence pour les séries à termes positifs, $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n \ln^2(n)}$ entraîne que la série $\sum u_n$ converge également.

6 Intégrales de Wallis et série associée

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$a_n = \int_0^1 t^n \sqrt{1-t^2} dt$$

1. Montrer que la suite (a_n) est décroissante, puis que $a_n \sim a_{n+1}$.

Décroissance. Pour $t \in [0, 1]$ on a $t^{n+1} \leq t^n$, et le facteur $\sqrt{1-t^2}$ est positif. La croissance de l'intégrale donne donc directement $a_{n+1} \leq a_n$. Tous les a_n sont par ailleurs strictement positifs, l'intégrande étant continu, positif et non identiquement nul.

Passage aux intégrales de Wallis. L'équivalence $a_n \sim a_{n+1}$ demande plus de matière. Effectuons le changement de variable $t = \sin(x)$, de classe $\mathcal{C}^1$ et bijectif de $[0, \frac{\pi}{2}]$ sur $[0, 1]$, avec $dt = \cos(x) dx$ et $\sqrt{1-t^2} = \cos(x)$ puisque le cosinus est positif sur cet intervalle :

$$a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x) \cos^2(x) dx$$

Introduisons les intégrales de Wallis $b_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x) dx$. En écrivant $\cos^2 = 1 - \sin^2$, il vient immédiatement :

$$a_n = b_n - b_{n+2}$$

La relation de récurrence de Wallis. Pour $n \geq 2$, intégrons b_n par parties en posant $u = \sin^{n-1}$ et $dv = \sin(x) dx$, donc $v = -\cos$:

$$b_n = \left[-\cos(x) \sin^{n-1}(x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}(x) \cos^2(x) dx$$

Le crochet est nul aux deux bornes. En réécrivant $\cos^2 = 1 - \sin^2$ dans l'intégrale restante, on obtient $b_n = (n-1)(b_{n-2} - b_n)$, d'où $nb_n = (n-1)b_{n-2}$, c'est-à-dire, après décalage d'indice :

$$b_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} b_n$$

En reportant dans $a_n = b_n - b_{n+2}$, on obtient une expression remarquablement simple :

$$a_n = b_n \left(1 - \frac{n+1}{n+2} \right) = \frac{b_n}{n+2}$$

L'équivalence. Combinons les deux relations précédentes :

$$a_{n+2} = \frac{b_{n+2}}{n+4} = \frac{n+1}{n+2} \times \frac{b_n}{n+4} = \frac{n+1}{n+4} a_n$$

La suite (a_n) étant décroissante et à termes strictement positifs, on peut encadrer le rapport $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ par les deux rapports voisins :

$$\frac{n+1}{n+4} = \frac{a_{n+2}}{a_n} \leq \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1$$

Le membre de gauche tend vers 1, donc $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow 1$ par encadrement, ce qui signifie exactement $a_n \sim a_{n+1}$.

2. Déterminer un équivalent de a_n , et en déduire la nature de la série $\sum a_n$.

Puisque $a_n = \frac{b_n}{n+2}$, il suffit d'obtenir un équivalent des intégrales de Wallis. La méthode classique consiste à exhiber une quantité *invariante* faisant intervenir deux termes consécutifs.

Un invariant. Posons $c_n = (n+1) b_n b_{n+1}$ et calculons c_{n+1} en utilisant la relation de récurrence :

$$c_{n+1} = (n+2) b_{n+1} b_{n+2} = (n+2) b_{n+1} \times \frac{n+1}{n+2} b_n = (n+1) b_n b_{n+1} = c_n$$

La suite (c_n) est donc constante. Sa valeur se lit au rang 0, avec $b_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$ et $b_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) dx = 1$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_n b_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)}$$

Équivalent de b_n . Le raisonnement de la question 1 appliqué à la suite (b_n) , elle aussi décroissante et positive, donne de la même façon $b_n \sim b_{n+1}$. Dès lors :

$$b_n^2 \sim b_n b_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)} \sim \frac{\pi}{2n}$$

Les termes étant positifs, on peut passer à la racine carrée dans cette équivalence, d'où $b_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

Équivalent de a_n . Il ne reste qu'à diviser par $n+2 \sim n$:

$$a_n = \frac{b_n}{n+2} \sim \frac{1}{n} \sqrt{\frac{\pi}{2n}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \times \frac{1}{n^{3/2}}$$

Nature de la série. La suite (a_n) est à termes positifs et équivalente au terme général d'une série de Riemann d'exposant $\frac{3}{2} > 1$, qui converge. Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum a_n$ **converge**.

3. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

L'écriture $a_n = b_n - b_{n+2}$ obtenue à la question 1 est télescopique, avec un décalage de deux crans au lieu d'un : la somme partielle laissera donc subsister *deux* termes de tête et deux termes de queue.

Soit $N \in \mathbb{N}$. En séparant les deux sommes et en décalant l'indice de la seconde :

$$\sum_{n=0}^N a_n = \sum_{n=0}^N b_n - \sum_{n=0}^N b_{n+2} = \sum_{n=0}^N b_n - \sum_{n=2}^{N+2} b_n = b_0 + b_1 - b_{N+1} - b_{N+2}$$

D'après la question 2, $b_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ tend vers 0, donc les deux termes de queue s'évanouissent. En reportant $b_0 = \frac{\pi}{2}$ et $b_1 = 1$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = b_0 + b_1 = \frac{\pi}{2} + 1$$

Remarque

On peut retrouver ce résultat sans les intégrales de Wallis, en intervertissant somme et intégrale. Pour $t \in [0, 1[$ on a $\sum_{n \geq 0} t^n = \frac{1}{1-t}$, ce qui suggère :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \int_0^1 \frac{\sqrt{1-t^2}}{1-t} dt = \int_0^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} dt$$

Cette dernière intégrale se calcule par le changement de variable $t = \cos(\theta)$ et redonne bien $1 + \frac{\pi}{2}$. L'inter-version se justifie par positivité de tous les termes.

7 Constantes de sommes partielles et séries alternées

On admet le résultat classique suivant : si $f \in \mathcal{C}([a, +\infty[, \mathbb{R})$ est positive et décroissante, avec $a \in \mathbb{N}^*$, alors la série

$$\sum_{n \geq a} \left(\int_{n-1}^n f(t) dt - f(n) \right)$$

converge, de sorte qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\sum_{k=a}^n f(k) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \int_a^n f(t) dt + \ell + o(1)$$

Appliqué à la fonction inverse, il donne $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$, où γ est la constante d'Euler. L'objet de l'exercice est d'identifier la constante ℓ dans deux autres cas, grâce à des séries alternées.

1. Montrer qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\sum_{k=1}^n \frac{\ln k}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{(\ln n)^2}{2} + \ell + o(1)$.

La fonction $f : t \mapsto \frac{\ln t}{t}$ est continue et positive sur $[1, +\infty[$, de dérivée $\frac{1-\ln t}{t^2}$: elle est décroissante sur $[e, +\infty[$, donc sur $[3, +\infty[$, mais pas sur $[1, +\infty[$ tout entier. On applique le résultat admis à partir de $a = 3$: il existe ℓ' tel que $\sum_{k=3}^n f(k) = \int_3^n f + \ell' + o(1)$. Or $t \mapsto \frac{(\ln t)^2}{2}$ est une primitive de f , donc $\int_3^n f = \frac{(\ln n)^2}{2} - \frac{(\ln 3)^2}{2}$. En rajoutant les termes $k = 1$ et $k = 2$, qui sont des constantes :

$$\sum_{k=1}^n \frac{\ln k}{k} = \frac{(\ln n)^2}{2} + \ell + o(1) \quad \text{avec } \ell = \ell' - \frac{(\ln 3)^2}{2} + \frac{\ln 2}{2}$$

Les premiers termes, sur lesquels f n'est pas monotone, ne changent que la constante : c'est le comportement de f à l'infini qui gouverne le développement.

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \frac{\ln k}{k} = \ln 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\ln k}{k}$$

L'idée est d'écrire une somme alternée comme « deux fois les termes pairs moins tous les termes » : pour toute suite (a_k) , $\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k a_k = 2 \sum_{j=1}^n a_{2j} - \sum_{k=1}^{2n} a_k$, puisque les termes pairs sont comptés $2 - 1 = 1$ fois et les impairs $0 - 1 = -1$ fois. Avec $a_k = \frac{\ln k}{k}$:

$$2 \sum_{j=1}^n a_{2j} = 2 \sum_{j=1}^n \frac{\ln 2 + \ln j}{2j} = \ln 2 \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} + \sum_{j=1}^n \frac{\ln j}{j}$$

En retranchant $\sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln k}{k}$, les termes $k \leq n$ de cette dernière somme se simplifient avec $\sum_{j=1}^n \frac{\ln j}{j}$, et il reste exactement $\ln 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\ln k}{k}$.

3. En déduire $\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{\ln k}{k}$.

Convergence. La suite $\left(\frac{\ln k}{k}\right)_{k \geq 3}$ est positive, décroissante et de limite nulle : par le critère spécial des séries alternées, la série $\sum (-1)^k \frac{\ln k}{k}$ converge, et sa somme S est la limite des sommes partielles S_{2n} d'indice pair.

Calcul. D'après la question 2, $S_{2n} = \ln 2 \cdot H_n - \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\ln k}{k}$. Le premier terme vaut $\ln 2 (\ln n + \gamma + o(1))$. Le second se calcule par différence grâce à la question 1, la constante ℓ disparaissant :

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\ln k}{k} &= \frac{(\ln 2n)^2 - (\ln n)^2}{2} + o(1) = \frac{(\ln n + \ln 2)^2 - (\ln n)^2}{2} + o(1) \\ &= \ln 2 \ln n + \frac{(\ln 2)^2}{2} + o(1) \end{aligned}$$

Les termes en $\ln 2 \ln n$ se compensent, et il reste :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{\ln k}{k} = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n} = \gamma \ln 2 - \frac{(\ln 2)^2}{2} \approx 0,1599$$

C'est le même mécanisme que pour $\sum \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2$, obtenu en écrivant $S_{2n} = H_{2n} - H_n$; ici, la constante γ ne s'élimine pas, à cause du facteur $\ln 2$ qui sort des termes pairs.

8 Lemme sous-additif de Fekete

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle *sous-additive*, c'est-à-dire telle que $u_{m+n} \leq u_m + u_n$ pour tous $m, n \in \mathbb{N}$. Montrer le *lemme sous-additif de Fekete* :

$$\frac{u_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \inf_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{u_k}{k}$$

où la borne inférieure est calculée dans $\overline{\mathbb{R}}$, c'est-à-dire qu'elle peut valoir $-\infty$, auquel cas l'énoncé signifie que $\frac{u_n}{n} \rightarrow -\infty$.

L'idée est la suivante : si $\frac{u_k}{k}$ est petit pour un certain k , alors en découpant n en q paquets de taille k plus un reste, la sous-additivité donne $u_n \leq qu_k + u_r$, et $\frac{u_n}{n}$ est à peu près $\frac{u_k}{k}$. La suite $\frac{u_n}{n}$ finit donc par descendre sous n'importe quelle valeur $\frac{u_k}{k}$, tout en restant au-dessus de leur borne inférieure.

Notons $L = \inf_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{u_k}{k} \in [-\infty, +\infty[$. Par définition, $\frac{u_n}{n} \geq L$ pour tout $n \geq 1$: il s'agit de montrer que $\frac{u_n}{n}$ finit par être inférieur à tout réel $M > L$.

Un préliminaire. Par sous-additivité itérée, $u_{qk} \leq qu_k$ pour tous $k \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^*$, ce qui se montre par récurrence sur q : $u_{(q+1)k} \leq u_{qk} + u_k \leq (q+1)u_k$.

Le découpage. Soit $M > L$. Par définition de la borne inférieure, il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{u_k}{k} < M$. Pour $n \geq k$, effectuons la division euclidienne $n = qk + r$ avec $q \in \mathbb{N}^*$ et $r \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$. La sous-additivité donne :

$$u_n = u_{qk+r} \leq u_{qk} + u_r \leq qu_k + u_r$$

et en divisant par $n > 0$:

$$\frac{u_n}{n} \leq \frac{qk}{n} \cdot \frac{u_k}{k} + \frac{u_r}{n}$$

Passage à la limite. Lorsque $n \rightarrow +\infty$ avec k fixé, $\frac{qk}{n} = 1 - \frac{r}{n} \rightarrow 1$, puisque $0 \leq r < k$; et $\frac{u_r}{n} \rightarrow 0$, car u_r ne prend qu'un nombre fini de valeurs, $u_0, \dots, u_{k-1}$, donc est borné. Le membre de droite tend vers $\frac{u_k}{k} < M$. Il existe donc un rang N tel que pour tout $n \geq N$:

$$\frac{u_n}{n} \leq \frac{qk}{n} \cdot \frac{u_k}{k} + \frac{u_r}{n} < M$$

Conclusion. Si $L \in \mathbb{R}$, on a montré que pour tout $M > L$, $L \leq \frac{u_n}{n} < M$ à partir d'un certain rang : c'est la définition de $\frac{u_n}{n} \rightarrow L$. Si $L = -\infty$, on a montré que pour tout réel M , $\frac{u_n}{n} < M$ à partir d'un certain rang : $\frac{u_n}{n} \rightarrow -\infty$. Dans les deux cas, $\frac{u_n}{n}$ converge dans $\overline{\mathbb{R}}$ vers $\inf_{k \geq 1} \frac{u_k}{k}$. Ce qu'il fallait démontrer.

Remarque

La force du lemme est de fournir la convergence de $\frac{u_n}{n}$ sans aucune hypothèse de monotonie, à partir de la seule inégalité $u_{m+n} \leq u_m + u_n$. Il s'applique par exemple à $u_n = \ln \|A^n\|$ pour une matrice A et une norme sous-multiplicative, ce qui donne l'existence de la limite $\lim \|A^n\|^{1/n}$, le rayon spectral ; à $u_n = \ln c_n$ où c_n compte les chemins auto-évitants de longueur n sur un réseau, ce qui définit la constante de connectivité ; ou encore au nombre de mots de longueur n d'un langage stable par concaténation. Pour une suite *sur*-additive, on obtient symétriquement la convergence vers la borne supérieure.