

Colle 01 Séries numériques

AUBERT–KERVAREC Ewen

Exercice 1.

1. (a) Comparer les suites

$$v_n = (\ln 1)^2 + \cdots + (\ln n)^2$$

et

$$I_n = \int_1^n \ln^2 t \, dt$$

- (b) Calculer un équivalent de I_n .
(c) En déduire un équivalent de v_n .
(d) Que dire de la convergence de la série de terme général

$$u_n = \frac{1}{(\ln 1)^2 + \cdots + \ln(n)^2}$$

2. Nature de la série de terme générale

$$u_n = (-1)^n \frac{\sqrt{n} \sin \frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n} + (-1)^n}.$$

Solution 1.

1. (a) La fonction $f : t \mapsto (\ln t)^2$ est croissante sur $[1, +\infty[$, donc $(\ln k)^2 \leq \int_k^{k+1} f(t) dt \leq (\ln(k+1))^2$.

On somme de 1 à n :

$$u_n \leq \int_1^{n+1} f(t) dt \leq u_{n+1} = u_n + \ln(n+1)^2 \leq \int_1^{n+2} f(t) dt$$

- (b) Une intégration par parties où on intègre la fonction constante 1 montre que

$$\int_1^k 1 \times (\ln t)^2 dt = [t(\ln t)^2]_1^k - 2 \int_1^k \ln t dt.$$

Dont on déduit que $I_k \sim (n \ln n)^2$.

- (c) Comme $I_n \sim I_{n+1}$, on en déduit que $v_n \sim n(\ln n)^2$.

- (d) On reconnaît une série de Bertrand de terme général $\frac{1}{n(\ln n)^2}$ convergente : on fait une comparaison série intégrale avec la fonction $x \mapsto \frac{1}{x \ln^2(x)}$ dont on connaît une primitive.

2. On écrit $u_n \sim (-1)^n \sin \frac{1}{\sqrt{n}}$. Le critère spécial des séries alternées nous assure la convergence de $(-1)^n \sin \frac{1}{\sqrt{n}}$, mais elle n'est pas de signe constant.

Nous allons étudier

$$u_n - (-1)^n \sin \frac{1}{\sqrt{n}} = (-1)^n \left[\frac{\sqrt{n} \sin \frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n} + (-1)^n} - \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \right] = \frac{\sin(\frac{1}{\sqrt{n}})}{\sqrt{n} + (-1)^n}$$

qui est équivalent à $\frac{1}{n}$, donc est le terme général d'une série divergente. On en déduit que $\sum u_n$ diverge.

Exercice 2.

1. Soit a un réel strictement positif.

Montrer que la série $\sum \sin(\pi\sqrt{n^2 + a^2})$ est semi-convergente.

2. α est un nombre réel donné non entier

- (a) Soit la série de terme général $a_n = \frac{(\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1))}{n!}$

Montrer que $|a_n| \sim \frac{k}{n^{1+\alpha}}$, k désignant un réel.

- (b) En déduire pour quelles valeurs du réel α la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!}$$

est absolument convergente?

- (c) Déterminer l'ensemble des valeurs de α pour lesquelles cette série est semi-convergente.

Solution 2.

1) Posons $c_n = \sin(\pi\sqrt{n^2 + a^2}) = \sin(\pi n(1 + \frac{a^2}{n^2})^{1/2})$ et

$$(1 + \frac{a^2}{n^2})^{1/2} = 1 + \frac{a^2}{2n^2} + O(1/n^4)$$

ce qui entraîne $c_n = \frac{(-1)^n \pi a^2}{2n} + O(1/n^3)$.

Cette décomposition en une série semi-convergente et une série absolument convergente induit le résultat attendu.

2)a) On remarque que

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{n - \alpha}{n + 1} = 1 - \frac{\alpha + 1}{n + 1} = 1 - \frac{\alpha + 1}{n} + \frac{\alpha + 1}{n^2} - \frac{\alpha + 1}{n^3} + O(\frac{1}{n^4}).$$

2)b) On pose $v_n = n^{\alpha+1}a_n$ et

$$\frac{(n+1)^{\alpha+1}}{n^{\alpha+1}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\alpha+1} = 1 + \frac{\alpha+1}{n} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{2n^2} + \frac{(\alpha+1)\alpha(\alpha-1)}{6n^3} + O(\frac{1}{n^4})$$

et on obtient que

$$\begin{aligned} \left| \frac{v_{n+1}}{v_n} \right| &= 1 + (\alpha + 1) \left[\frac{1 - 1}{n} + \frac{1 - (\alpha + 1) + \alpha/2}{n^2} + \frac{-1 + (\alpha + 1) - \alpha(\alpha + 1)/2 + \alpha(\alpha - 1)/6}{n^3} \right] + O(\frac{1}{n^4}) \\ &= 1 - \frac{\alpha}{2n^2} + \frac{2\alpha}{6n^3} + O(\frac{1}{n^4}) \end{aligned}$$

On en déduit que $\ln |v_{n+1}| - \ln |v_n| = \ln(1 - \frac{\alpha}{n^2} + O(\frac{1}{n^4})) \sim -\frac{1}{n^2}$.

La somme télescopique $\sum_n \ln |v_{n+1}| - \ln |v_n|$ est convergente, donc $\ln |v_n|$ converge vers un réel a . Par continuité de l'exponentielle, $|v_n|$ converge $c = e^a > 0$.

Finalement,

$$|a_n| \sim \frac{c}{n^{1+\alpha}}.$$

En fait, il suffisait de calculer $\left| \frac{v_{n+1}}{v_n} \right| = 1 + O(\frac{1}{n^2})$ pour obtenir la convergence de la série de terme général $\ln |v_{n+1}| - \ln |v_n|$.

2)c) On en déduit l'absolue convergence si seulement si $\alpha > 0$.

2)d) Pour n assez grand, $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\alpha - n}{n + 1}$ est négatif. Donc, à partir d'un certain rang, la série $\sum a_n$ devient alternée.

Si $\alpha \leq -1$, nous avons $|a_{n+1}| \geq |a_n|$ et alors la série est divergente puisque son terme général ne tend pas vers 0.

Si par contre, $\alpha > -1$ et $\alpha \leq 0$, on a l'inégalité $|a_{n+1}| \leq |a_n|$ tout au moins à partir d'un certain rang.

Comme, de plus, $|a_n|$ tend vers 0, on a la convergence d'après le critère spécial des séries alternées.

Donc la série est semi-convergente si et seulement si $\alpha \in]-1, 0[$.

Exercice 3. On considère la suite réelle définie par $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = \sqrt{\frac{1+x_n}{2}}$ pour tout $n \geq 0$. Étudier la convergence de la série $\sum (1 - x_n)$.

Exercice 4. Existe-t-il une bijection $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ telle que la série $\sum \frac{f(n)}{n^2}$ converge ?

Solution 3. On reconnaît une suite du type $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{2}}$. La fonction f est strictement croissante, donc (u_n) est strictement monotone si elle n'est pas constante. Comme $u_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} > u_0$ la suite est strictement croissante.

$$f(x) = x \iff \frac{1+x}{2} = x^2 \iff 2x^2 - x - 1 = 0 \iff (x-1)\left(x + \frac{1}{2}\right) = 0.$$

On en déduit que $[-\frac{1}{2}, 1]$ est stable par f . Donc (u_n) croissante majorée est convergente vers l'unique point fixe $\geq u_1$, c'est-à-dire 1.

De plus, comme $x_n - 1$ tend strictement vers 0, on a

$$x_{n+1} - 1 = \sqrt{\frac{1+x_n}{2}} - 1 = \sqrt{1 + \frac{x_n - 1}{2}} - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x_n - 1}{2}$$

avec $x_n - 1$ non nul.

D'après le critère de D'Alembert la série $\sum (x_n - 1)$ converge puisque $\lim \left| \frac{x_{n+1} - 1}{x_n - 1} \right| = \frac{1}{2} < 1$.

Solution 4. Notons que $\sum_{k=N+1}^{2N} \frac{f(k)}{k^2} \geq \sum_{k=N+1}^n (k - N) \times \frac{1}{4N^2}$, car f est bijective donc les $f(k)$ décrivent N valeurs distinctes. On en déduit que cette quantité ne tend pas vers 0. La série diverge.

XXX

Exercice 5. Soient (u_n) et (a_n) deux suites de réels strictement positifs.

1. On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ et $A > 0$ tels que, pour tout $n \geq p$, on a

$$a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} \geq A.$$

Démontrer que la série $\sum_n u_n$ converge.

2. On suppose qu'il existe un entier $p \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq p$, on a

$$a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} \leq 0.$$

On suppose en outre que $\sum_n \frac{1}{a_n}$ diverge. Prouver que $\sum_n u_n$ diverge.

3. Application 1 : retrouver la règle de d'Alembert.

4. Application 2 : étudier la convergence de $\sum_n u_n$ pour

$$u_n = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \cdots \times 2n} \text{ et } u_n = \frac{1}{n} \times \frac{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \cdots \times 2n}.$$

Solution 5.

1. L'idée est de se ramener à une somme télescopique. En effet, on a, pour tout $n \geq p$,

$$Au_{n+1} \leq a_n u_n - a_{n+1} u_{n+1}.$$

Soit $N \geq p$, on somme les inégalités précédentes pour n allant de p à $N - 1$. On obtient

$$A \sum_{n=p}^{N-1} u_{n+1} \leq a_p u_p - a_N u_N \leq a_p u_p.$$

Notant $S_N = \sum_{n=1}^N u_n$ la somme partielle de la série, on obtient

$$S_N \leq \frac{a_p u_p}{A} + S_p.$$

Autrement dit, la suite des sommes partielles $(S_N)_N$ est majorée. Comme on a affaire à une série à termes positifs, ceci assure la convergence de la série.

2. L'hypothèse s'écrit encore $a_{n+1} u_{n+1} \geq a_n u_n$ pour tout $n \geq p$. On en déduit que $a_n u_n \geq a_p u_p$, et donc que

$$u_n \geq a_p u_p \times \frac{1}{a_n}.$$

Or la série $\sum_n \frac{1}{a_n}$ est divergente et à termes positifs. On a donc par comparaison divergence de la série $\sum_n u_n$.

3. Supposons que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \rightarrow l > 1$. Posons $a_n = 1$. Alors $\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \rightarrow \frac{1}{l} - 1 < 0$, et donc pour n assez grand, on a $\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \leq 0$. Puisque la série $\sum_n 1$ diverge, il en est de même de $\sum_n u_n$.

Au contraire, supposons maintenant que $l < 1$. On prend la même suite (a_n) , et on observe que $\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \rightarrow \frac{1}{l} - 1 > 0$, et donc pour n assez grand, on a

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \geq \frac{\frac{1}{l} - 1}{2} > 0.$$

Par le premier point, $\sum_n u_n$ converge.

4. Pour les deux séries, la règle de d'Alembert ne permet pas de conclure car on est dans son cas litigieux où le quotient u_{n+1}/u_n tend vers 1. On va conclure par la règle de Kummer en utilisant à chaque fois $a_n = n$. Pour la première série, on a

$$a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} = -\frac{n+1}{2n+1} \leq 0.$$

Puisque la série $\sum_n \frac{1}{n}$ est divergente, il en est de même de $\sum_n u_n$.

Pour la deuxième série, on a cette fois

$$a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} = \frac{n+1}{2n+1} \geq \frac{1}{2} > 0.$$

Ainsi, par la règle de Kummer, la série est convergente.