

CORRIGÉ DE LA COLLE N° 01

Séries numériques

22 septembre 2026

Exercice 1 (règle de Raab-Duhamel). Soit (u_n) une suite strictement positive.

On suppose qu'il existe un réel α tel que : $\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{\alpha}{n}$.

1. Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \frac{1}{n}$. Montrer que : $\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1-\alpha}{n}$.
2. On suppose que $\alpha < 1$. En déduire qu'il existe un rang N tel que : $\forall n \geq N$, $nu_n \geq Nu_N$. Puis montrer que la série $\sum u_n$ diverge.
3. Soit $u_n = \sqrt{n!} \times \prod_{k=1}^n \sin \frac{1}{\sqrt{k}}$ pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la nature de la série $\sum u_n$.

1. D'une part $\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{\alpha}{n}$, d'où $\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 = -\frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$. D'autre part, $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$. D'où

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1-\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right). \text{ Donc } \boxed{\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1-\alpha}{n}}$$

2. Si $\alpha < 1$, alors $\frac{1-\alpha}{n} < 0$. Or $\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1-\alpha}{n}$. D'où $\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n} \leq 0$ à partir d'un certain rang N . D'où $\forall n \geq N$, $(n+1)u_{n+1} \geq nu_n$. Donc $\forall n \geq N$, $nu_n \geq Nu_N$.

On en déduit que $\forall n \geq N$, $u_n \geq (Nu_N) \cdot \frac{1}{n}$. Or la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge. Donc

la série $\sum u_n$ diverge

3. La suite définie pour tout $n \geq 1$ par $u_n = \sqrt{n!} \times \prod_{k=1}^n \sin\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$ est strictement positive. Et $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \sqrt{n+1} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) =$

$$\sqrt{n+1} \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{6\sqrt{n+1}^3} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}^3}\right) \right) = 1 - \frac{1}{6(n+1)} + o\left(\frac{1}{n+1}\right). \text{ D'où}$$

$$\boxed{\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{1}{6n}}$$

Or $\frac{1}{6} < 1$, donc la

série $\sum u_n$ diverge d'après la question précédente.

Exercice 2. Soit la suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par

$$u_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+3} + \cdots + \frac{1}{4n-1} = \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{2k+1}.$$

1. Montrer que $u_{n+1} - u_n \sim \frac{1}{32n^3}$. En déduire que la suite (u_n) converge.
2. Montrer que sa limite vaut $\ell = \frac{\ln(2)}{2}$.

3. Montrer que $\ell - u_n \sim \frac{1}{64n^2}$.

$$1. u_n = \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{2k+1}, \text{ d'où : } u_{n+1} = \sum_{k=n+1}^{2(n+1)-1} \frac{1}{2k+1} = \frac{1}{2n+3} + \frac{1}{2n+5} + \dots + \frac{1}{4n-1} + \frac{1}{4n+1} + \frac{1}{4n+3} \text{ et}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{4n+1} + \frac{1}{4n+3} - \frac{1}{2n+1} = \frac{1}{(4n+1)(4n+3)(2n+1)}$$

après calcul pour tout mettre sur le même dénominateur. Donc $u_{n+1} - u_n \sim \frac{1}{32n^3}$.

La série $\sum(u_{n+1} - u_n)$ est de même nature que la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^3}$, donc convergente.

Or $u_n = u_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (u_{k+1} - u_k)$ (c'est une somme télescopique), donc la suite (u_n) converge.

2. La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{2x+1}$ est continue et décroissante sur $[n; 2n]$, d'où (en comparant série et intégrale, voir figure) :

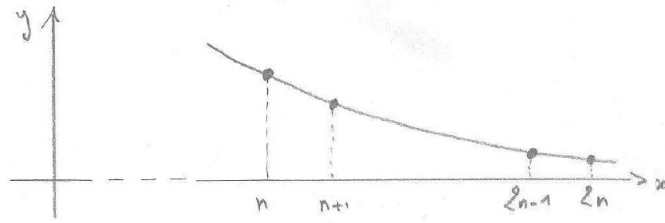


FIGURE 1 – COMPARAISON SÉRIE-INTÉGRALE.

$$\frac{1}{2} \ln \left(\frac{4n+1}{2n+1} \right) = \int_n^{2n} \frac{1}{2x+1} dx \leq u_n \leq \int_{n-1}^{2n-1} \frac{1}{2x+1} dx = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{4n-1}{2n-1} \right).$$

Les deux gendarmes convergent et ont la même limite $\frac{1}{2} \ln 2$, donc u_n converge et sa limite vaut $\frac{1}{2} \ln 2$.

3. $u_n = \sum_{k=1}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) + u_1$, d'où $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \sum_{k=1}^{\infty} (u_{k+1} - u_k) + u_1$, donc $\ell - u_n = \sum_{k=n}^{\infty} (u_{k+1} - u_k)$ est le reste de la série convergente $\sum (u_{k+1} - u_k)$. Or $u_{k+1} - u_k \sim \frac{1}{32k^3}$, d'où $\ell - u_n \sim \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{32k^3}$ d'après le théorème de sommation des $\sim$.

Or, en comparant série et intégrale, on obtient l'encadrement $\frac{1}{2n^2} \leq \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^3} \leq \frac{1}{2(n-1)^2}$, d'où $\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^3} \sim \frac{1}{2n^2}$, donc $\ell - u_n \sim \frac{1}{64n^2}$.

Exercice 3. Montrer que la série $\sum (-1)^n \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$ est convergente et que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\sum_{n=1}^{2p+1} (-1)^n \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) =$

$2 \ln u_p$, où $u_p = \frac{(2p+1)!}{2^{2p} p!^2 \sqrt{2p+2}}$. En utilisant la formule de Stirling, déterminer un équivalent de u_p et en

déduire que $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) = \ln 2 - \ln \pi$.

La suite $\ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$ tend vers 0 en décroissant, donc la série $\sum (-1)^n \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$ converge d'après le TSA. En séparant les termes positifs et négatifs :

$$\sum_{n=1}^{2p+1} (-1)^n \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) = \sum_{q=1}^p \ln \left(\frac{2q+1}{2q} \right) - \sum_{q=0}^p \ln \left(\frac{2q+2}{2q+1} \right) = \ln \left(\frac{3^2 \times 5^2 \times \dots \times (2p+1)^2}{2^2 \times 4^2 \times \dots \times (2p)^2 \times (2p+2)} \right) = 2 \ln u_p$$

$$\text{en notant } u_p = \frac{3 \times 5 \times \dots \times (2p+1)}{2 \times 4 \times \dots \times (2p) \times \sqrt{2p+2}} = \frac{2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times \dots \times (2p) \times (2p+1)}{[2 \times 4 \times \dots \times (2p)]^2 \times \sqrt{2p+2}} = \frac{(2p+1)!}{p!^2 \cdot 2^{2p} \cdot \sqrt{2p+2}}.$$

En utilisant la formule de Stirling $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$:

$$u_p \sim \frac{(2p+1)^{2p+1} \sqrt{2\pi(2p+1)}}{e^{2p+1}} \times \left(\frac{e^p}{p^p \sqrt{2\pi p}}\right)^2 \times \frac{1}{2^{2p} \sqrt{2p+2}} \sim \frac{2}{e\sqrt{2\pi}} \times \left(\frac{2p+1}{2p}\right)^{2p+1}.$$

On lève la forme indéterminée : $\left(\frac{2p+1}{2p}\right)^{2p+1} = e^{(2p+1) \ln\left(1+\frac{1}{2p}\right)} \xrightarrow{p \rightarrow \infty} e$. D'où $u_p \xrightarrow{p \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{2\pi}}$. D'où $\sum_{n=1}^{2p+1} (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 2 \ln u_p \xrightarrow{p \rightarrow \infty} \ln 2 - \ln \pi$. Donc $\sum_{n=1}^{2p+1} (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \xrightarrow{p \rightarrow \infty} \ln 2 - \ln \pi$. C'est la limite de la sous-suite des sommes partielles de rang impair. Or la suite des sommes partielles converge car on a montré que la série converge. D'où la suite des sommes partielles tend vers $\ln 2 - \ln \pi$. Donc $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln 2 - \ln \pi$.