

CORRIGÉ DU KDO DU 28/09/2026

RACINES CARRÉES D'UNE MATRICE

Soient E un $\mathbb{R}$ –espace vectoriel de dimension 3, (e_1, e_2, e_3) une base de E et f l'endomorphisme de E représenté, dans la base (e_1, e_2, e_3) , par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer, si elle existe, une base (u, v, w) de E dans laquelle la matrice de l'endomorphisme f s'écrit

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. On suppose que g est un endomorphisme de E tel que $g \circ g = f$. On note N la matrice, dans la base (u, v, w) , de cet endomorphisme g . Montrer que

$$\exists (s, t, x, y) \in \mathbb{R}^4, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & s \\ 0 & x & t \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix}.$$

3. Déterminer toutes les matrices carrées N telles que $N^2 = B$ et en déduire toutes les matrices carrées M telles que $M^2 = A$.

-
1. Soit (u, v, w) une base de E : $[f]_{(u,v,w)} = B \iff \begin{cases} f(u) = 0_E & L_1 \\ f(v) = v & L_2 \\ f(w) = -3u + 4v + w & L_3 \end{cases}.$

(*) Soit $u = xe_1 + ye_2 + ze_3$:

$$L_1 \iff A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff / \cdots / \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \iff u = y(e_2 - 2e_3)$$

(**) De même, $L_2 \iff \exists y \in \mathbb{R}, v = y(e_2 - e_3).$

(***) On choisit $u = e_2 - 2e_3$ et $v = e_2 - e_3$. Soit $w = xe_2 + ye_2 + ze_3$:

$$L_3 \iff \iff A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - 2y - 2z = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 \\ z = -y \end{cases}.$$

On choisit $w = e_1$.

On vérifie que la famille $(u, v, w) = (e_2 - 2e_3, e_2 - e_3, e_1)$ est libre. On a ainsi obtenu une base dans laquelle la matrice de f est B .

2. On suppose que $g \circ g = f$.

Les endo. f et g commutent car $f \circ g = (g \circ g) \circ g = g \circ (g \circ g) = g \circ f$. D'où le *sev* $\text{Ker}(f)$ est stable par l'endo g . Or $u \in \text{Ker}(f)$ d'après L_1 . D'où le vecteur $g(u)$ appartient aussi à $\text{Ker}(f)$.

Or $\text{Ker}(f) = \text{Vect}(u)$ d'après (*) à la question précédente. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $g(u) = \lambda u$. D'où $0 = f(u) = g \circ g(u) = g(\lambda u) = \lambda g(u) = \lambda^2 u$, d'où $\lambda^2 = 0$, donc $\lambda = 0$. Finalement $g(u) = \lambda u = 0u = 0$, ce qui prouve la première colonne de la matrice N .

De même : les endo. $f - \text{id}$ et g commutent, d'où le *sev* $\text{Ker}(f - \text{id})$ est stable par l'endo g . Or $v \in \text{Ker}(f - \text{id})$ d'après (**), d'où $g(v) \in \text{Ker}(f - \text{id})$. Or $\text{Ker}(f - \text{id}) = \text{Vect}(v)$ d'après (**). Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $g(v) = \lambda v$. En notant x ce réel λ , on a prouvé la deuxième colonne de la matrice N .

La troisième colonne de la matrice N ne réclame aucune preuve.

3. On calcule $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & sy \\ 0 & x^2 & xt + yt \\ 0 & 0 & y^2 \end{pmatrix}$. D'où $N^2 = B \iff \begin{cases} x^2 = 1 \\ y^2 = 1 \\ (x + y)t = 4 \\ sy = -3 \end{cases} \iff (x, y, s, t) \in \{(1, 1, -3, 2); (-1, -1, 3, -2)\}.$

Enfin $M^2 = A \iff g \circ g = f \iff N^2 = B$ en changeant de base. Or $N = P^{-1}MP$ d'après les formules de passage, en

notant $P = \begin{matrix} & u & v & w \\ \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$ la matrice de passage de la vieille base (e_1, e_2, e_3) vers la nouvelle base (u, v, w) . Son

inverse est $P^{-1} = / \cdots / = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Donc

$$M^2 = A \iff M = \pm P \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = \pm / \cdots /.$$