

FEUILLE DE T.D. N° 3

Intégrales

Exercice 1. Soit $F(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{t - \ln(t)} dt$.

1. Montrer que la fonction F est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que, pour tout $x > 0$,

$$F'(x) = \frac{\ln(2) - \ln(x)}{[2x - \ln(2x)][x - \ln(x)]}.$$

2. Montrer que, pour tout x strictement positif, $0 \leq F(x) \leq x$.
3. Déterminer un équivalent de $\frac{1}{t - \ln(t)} - \frac{1}{t}$ quand t tend vers $+\infty$ et calculer $\int_x^{2x} \frac{\ln t}{t^2} dt$ pour tout $x > 0$.
4. Étudier les limites en 0 et en $+\infty$ de la fonction F .

Exercice 2. On note $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$ et on rappelle que $H_n - \ln(n)$ tend vers un réel γ appelé la *constante d'Euler*. Soit, pour tout réel $t > 0$,

$$f(t) = \frac{1}{t} - \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor.$$

1. Représenter graphiquement la fonction f et justifier qu'elle est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$.
2. Montrer que l'intégrale $\int_0^1 f(t) dt$ est convergente.
3. Calculer, pour chaque entier $n \in \mathbb{N}^*$, le réel $I_n = \int_{1/n}^1 f(t) dt$.
4. En déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^1 f(t) dt$.

Exercice 3. Montrer que ces intégrales convergent et les calculer :

$$A = \int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}} dx \quad B = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2} \quad C = \int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{(1+t)^2} dt$$

Exercice 4. Etudiez la convergence des intégrales suivantes :

$$\begin{aligned} D &= \int_0^1 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} dx & E &= \int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} dx \\ F &= \int_7^{+\infty} e^{-x} \ln(x) dx & G &= \int_0^7 e^{-x} \ln(x) dx \\ H &= \int_0^1 \frac{e^{\sin t}}{t} dt & I &= \int_1^{+\infty} \frac{e^{\sin t}}{t} dt \\ J &= \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t} + \sin t} dt & K &= \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \end{aligned}$$

Exercice 5 (Oral Petites Mines 2010). Quelle est la nature de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x} \ln\left(\frac{2+x}{1+x}\right) dx ?$$

Exercice 6. On étudie la fonction $F :]-\infty, 1[\rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t} dt$ appelée le **dilogarithme**.

1. Montrer que l'intégrale $\int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{t} dt$ est convergente.
2. On note $\lambda = -\int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{t} dt$. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x - 1} dx$ converge et qu'elle est égale à λ .
3. Pour chaque $k \in \mathbb{N}^*$, montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} x e^{-kx} dx$ converge et la calculer.

4. En déduire que, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \int_0^{+\infty} x \frac{1 - e^{-nx}}{e^x - 1} dx$.
5. Montrer que, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq \lambda - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{n}$. Qu'en déduire ?

Exercice 7. Soit $f: x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \int_1^x \frac{e^t}{t} dt$.

Étudier la nature de l'intégrale $\int_0^1 \frac{e^t - 1}{t} dt$. En déduire un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers 0^+ .

Retrouver cet équivalent en utilisant la [▷ prop. 15 du chapitre III](#).

Exercice 8. Soient, pour chaque $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)t}{t} dt \quad \text{et} \quad b_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} dt.$$

1. Montrer que ces intégrales généralisées sont convergentes.
2. Montrer que la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante. Quelle est la valeur de cette constante ?
3. Montrer que l'intégrale généralisée $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ est convergente.
4. Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = I$.
5. (**Lemme de Riemann-Lebesgue**) Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. Montrer que :

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi/2} f(t) \sin(\lambda t) dt = 0.$$

6. Soit f la fonction définie sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ par

$$f(0) = 0 \quad \text{et} \quad f(t) = \frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t} \text{ si } t \neq 0.$$

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$.

7. Étudier $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n)$.

8. (**Intégrale de Dirichlet**) Montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$$

Exercice 9. 1. Montrer que les intégrales généralisées

$$A = \int_0^1 \frac{\ln t}{t-1} dt \quad \text{et} \quad B = \int_0^1 \frac{(\ln t)^2}{1-t} dt$$

sont convergentes.

2. Montrer que, pour chaque $n \geq 2$, le réel

$$a_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x+\dots+x^{n-1}} dx \text{ est égal à } \frac{1}{n} \int_0^1 \frac{t^{1/n}(1-t^{1/n})}{1-t} dt.$$

3. Soient $t \in]0, 1]$ et, pour chaque $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = t^x(1-t^x)$. Montrer que la fonction f est deux fois dérivable. Calculer $f(0)$, $f'(0)$ et montrer que, pour tout $x \geq 0$, $|f''(x)| \leq 3(\ln t)^2$.
4. [▷ Réviser la formule de Taylor avec reste intégral](#).
En déduire que, pour tout $t \in]0, 1]$,

$$\left| t^{1/n}(1-t^{1/n}) + \frac{1}{n} \ln t \right| \leq \frac{3(\ln t)^2}{2n^2}$$

5. Montrer que $\left| a_n - \frac{A}{n^2} \right| \leq \frac{3B}{2n^3}$. En déduire un équivalent de a_n .

Exercice 10. 1. Quelle est la nature de l'intégrale généralisée

$$\int_2^{+\infty} \ln^\alpha(t) dt, \text{ pour tout } \alpha \in \mathbb{R} ?$$

2. Après une intégration par parties, déterminer un équivalent, quand x tend vers $+\infty$, de $\int_2^x \ln^\alpha(t) dt$.

Et aussi : les 4 exercices du DS 2025-2026 n° 3.