

PROGRAMME DE LA COLLE N° 3

Semaine du 5/10/2026

● **Algèbre linéaire** ▷ **chapitre II et TD n°2** :

1. familles libres ou génératrices, bases, sous-espaces vectoriels ;
2. application linéaire $u : E \rightarrow F$ en dimension finie ou infinie, noyau et image, $\text{Im}(u) = \text{Vect}(u(e_1), \dots, u(e_n))$ si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E ;
3. représentations matricielle d'une application linéaire dans une base, formules de passage, utilisation d'une base adaptée à un problème ;
4. tout supplémentaire du noyau est isomorphe à l'image et (si l'ev de départ est de dimension finie) théorème du rang ;
5. trace, rang et déterminant sont des invariants de similitude ;
6. produit, intersection, somme et somme directe de deux ou plusieurs *sev* $F_1, \dots, F_p$ d'un *ev* E , propriétés de l'application $F_1 \times \dots \times F_p \rightarrow E$, $(x_1, \dots, x_p) \mapsto x_1 + \dots + x_p$;
7. projecteurs et symétries ;
8. stabilité d'un *sev* par un endomorphisme ; si deux endomorphismes commutent, alors le noyau et l'image de l'un sont stables par l'autre ; *endo* induit par un *endo* sur un *sev* stable ;
9. déterminant de Vandermonde ;
10. calcul matriciel par blocs, matrices et déterminants triangulaires ou diagonaux par blocs ;
11. formes linéaires et hyperplans (en dimension finie ou infinie)

comme la semaine dernière, et aussi, et surtout :

12. polynômes annulateurs d'une matrice A & application aux calcul des puissances ou de l'inverse de A ;
13. polynôme minimal μ_A d'une matrice A , $\dim \mathbb{K}[A] = \deg \mu_A$;
14. indice de nilpotence et polynôme minimal d'une matrice nilpotente ;
15. lemme des noyaux.

Et aussi, pourquoi pas ?

● **Arithmétique, structures & polynômes** ▷ **annexe A & TD A** :

16. groupes, anneaux, corps, algèbres ;
17. division euclidienne dans $\mathbb{Z}$ et dans $\mathbb{R}[X]$;
18. idéaux d'un anneau commutatif, idéaux de $\mathbb{Z}$ et de $\mathbb{R}[X]$;
19. la somme de deux idéaux est un idéal (et pgcd dans $\mathbb{Z}$), l'intersection de deux idéaux est un idéal (et ppcm dans $\mathbb{Z}$) ;
20. lemme de Bézout, lemme de Gauss ;
21. ~~éléments inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et indicatrice d'Euler ;~~
22. ~~théorème chinois ;~~
23. groupe symétrique ;
24. ~~ordre d'un élément d'un groupe fini, l'ordre d'un élément divise le cardinal du groupe ;~~
25. ~~théorème d'Euler, petit théorème de Fermat.~~

À venir : intégrales généralisées.