

C O L L E N° 0 2

Algèbre linéaire

Exercice 1. 1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une unique matrice antisymétrique A , une unique matrice symétrique S et un unique réel $c \in \mathbb{R}$ tels que

$$M = A + S + cI_n \quad \text{et} \quad \text{Tr}(S) = 0.$$

2. En déduire la décomposition de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ en la somme directe de trois sous-espaces vectoriels.

Exercice 2. Soit E un espace vectoriel.

1. Soient p et q deux endomorphismes de E tels que $p \circ q = q \circ p$. Montrer que :

$$\text{Ker}(p) + \text{Ker}(q) \subset \text{Ker}(p \circ q) \quad \text{et} \quad \text{Im}(p \circ q) \subset \text{Im}(p) \cap \text{Im}(q).$$

2. Soient p et q deux projecteurs de E tels que $p \circ q = q \circ p$. Montrer que :

- (a) $p \circ q$ est un projecteur ;
- (b) les inclusions précédentes sont des égalités.

Exercice 3. Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension 3 et un endomorphisme $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\varphi^3 = 0$ et $\varphi^2 \neq 0$. (On a noté $\varphi^2 = \varphi \circ \varphi$ et $\varphi^3 = \varphi \circ \varphi \circ \varphi$.)

- 1. Montrer qu'il existe un vecteur u_0 tel que la famille $(u_0, \varphi(u_0), \varphi^2(u_0))$ est une base de E .
- 2. Écrire la matrice de φ dans cette base.
- 3. En déduire qu'un endomorphisme commute avec φ si, et seulement si, il appartient à $\mathbb{K}[\varphi]$.
- 4. Déterminer tous les endomorphismes de $\mathbb{K}_2[X]$ qui commutent avec

$$\begin{array}{ccc} f : \mathbb{K}_2[X] & \rightarrow & \mathbb{K}_2[X] \\ P & \mapsto & P'. \end{array}$$