

1 Série de sommes

Déterminer, pour $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé, la nature de la série de terme général :

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k^2 + (n-k)^2)^\alpha}$$

L'idée est d'encadrer le terme $k^2 + (n-k)^2$, uniformément en $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, par des quantités proportionnelles à n^2 : la somme des n termes de u_n se compare alors à n fois une puissance de n , ce qui ramène l'étude au critère de Riemann.

Pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a d'une part, en majorant grossièrement chaque carré par n^2 :

$$k^2 + (n-k)^2 \leq n^2 + n^2 = 2n^2$$

et d'autre part, en mettant sous forme canonique :

$$k^2 + (n-k)^2 = 2k^2 - 2nk + n^2 = 2\left(k - \frac{n}{2}\right)^2 + \frac{n^2}{2} \geq \frac{n^2}{2}$$

Supposons désormais $\alpha > 0$ (le cas $\alpha \leq 0$ est immédiat : le terme général $u_n \geq n$ ne tend alors pas vers 0, et la série diverge grossièrement). En élevant l'encadrement précédent à la puissance $\alpha > 0$, qui conserve l'ordre entre réels positifs, puis en prenant l'inverse (qui l'inverse), et enfin en sommant sur les n valeurs de k :

$$\frac{n}{(2n^2)^\alpha} \leq u_n \leq \frac{n}{(n^2/2)^\alpha}$$

c'est-à-dire :

$$\frac{1}{2^\alpha n^{2\alpha-1}} \leq u_n \leq \frac{2^\alpha}{n^{2\alpha-1}}$$

Il ne reste plus qu'à distinguer les cas selon la position de $2\alpha - 1$ par rapport à 1 :

- Si $2\alpha - 1 > 1$ (c'est-à-dire $\alpha > 1$), la série de Riemann de terme général $\frac{2^\alpha}{n^{2\alpha-1}}$ converge. Comme $u_n \geq 0$ et $u_n \leq \frac{2^\alpha}{n^{2\alpha-1}}$, le critère de comparaison donne la convergence de $\sum u_n$.
- Si $2\alpha - 1 \leq 1$ (c'est-à-dire $\alpha \leq 1$), la série de Riemann de terme général $\frac{1}{2^\alpha n^{2\alpha-1}}$ diverge. Comme $u_n \geq \frac{1}{2^\alpha n^{2\alpha-1}} \geq 0$, le critère de comparaison donne la divergence de $\sum u_n$.

La série $\sum u_n$ converge donc si, et seulement si, $\alpha > 1$.

Remarque

Le cas $\alpha \leq 0$ se traite immédiatement : le terme général u_n ne tend alors pas vers 0 (il est même minoré par une quantité qui explose ou reste supérieure à n , selon le signe strict de α), ce qui redonne la divergence, cohérente avec la conclusion $\alpha > 1$.

2 Décomposition de l'identité

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $f_1, \dots, f_p \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $f_1 + \dots + f_p = \text{Id}_E$ et que $f_i f_j = 0_{\mathcal{L}(E)}$ pour tous $i, j \in \llbracket 1, p \rrbracket$ distincts. Montrer que $f_1, \dots, f_p$ sont des projecteurs et que $E = \text{Im } f_1 \oplus \dots \oplus \text{Im } f_p$.

Ce sont des projecteurs. L'idée est de composer la relation $\text{Id}_E = f_1 + \dots + f_p$ par f_i : tous les produits croisés disparaissent. Pour $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$:

$$f_i = f_i \circ \text{Id}_E = f_i (f_1 + \dots + f_p) = \sum_{j=1}^p f_i f_j = f_i^2$$

puisque $f_i f_j = 0$ pour $j \neq i$. Chaque f_i est donc un projecteur.

La somme des images est E . Pour tout $x \in E$, $x = \text{Id}_E(x) = f_1(x) + \dots + f_p(x)$ avec $f_i(x) \in \text{Im } f_i$. Donc $E = \text{Im } f_1 + \dots + \text{Im } f_p$.

La somme est directe. Soient $y_1 \in \text{Im } f_1, \dots, y_p \in \text{Im } f_p$ tels que $y_1 + \dots + y_p = 0$. Appliquons f_i : comme $y_j \in \text{Im } f_j$, on a $y_j = f_j(y_j)$, donc $f_i(y_j) = f_i f_j(y_j) = 0$ pour $j \neq i$, et $f_i(y_i) = y_i$. Il reste $y_i = 0$. Ceci pour tout i : la décomposition du vecteur nul est triviale, et la somme est directe.

Ainsi $E = \text{Im } f_1 \oplus \dots \oplus \text{Im } f_p$, et f_i est précisément la projection sur $\text{Im } f_i$ parallèlement à la somme des autres images : pour $x = y_1 + \dots + y_p$, on a en effet $f_i(x) = y_i$ par le même calcul.

Remarque

La réciproque est vraie : si $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_p$ et si f_i est la projection sur E_i parallèlement aux autres, alors $\sum f_i = \text{Id}_E$ et $f_i f_j = 0$ pour $i \neq j$. Une telle famille est ce qu'on appelle un *système de projecteurs* associé à la décomposition.

3 Noyau d'une somme

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie et $u, v \in \mathcal{L}(E, F)$. Montrer que :

$$\dim \ker(u + v) \leq \dim(\text{Im } u \cap \text{Im } v) + \dim(\ker u \cap \ker v)$$

Sur $\ker(u + v)$, on a $u(x) = -v(x)$: le vecteur $u(x)$ est dans l'image de u et dans celle de v . C'est ce qui suggère de restreindre u à $\ker(u + v)$ et d'appliquer le théorème du rang : le noyau de cette restriction sera $\ker u \cap \ker v$, et son image sera dans $\text{Im } u \cap \text{Im } v$.

Notons $N = \ker(u + v)$ et $w : N \rightarrow F, x \mapsto u(x)$, la restriction de u à N .

Image de w . Pour $x \in N$, on a $u(x) + v(x) = 0$, donc $u(x) = v(-x) \in \text{Im } v$. Comme $u(x) \in \text{Im } u$ de toute façon, $\text{Im } w \subseteq \text{Im } u \cap \text{Im } v$.

Noyau de w . Soit $x \in N$ tel que $u(x) = 0$. Alors $v(x) = -u(x) = 0$, donc $x \in \ker u \cap \ker v$. Réciproquement, si $x \in \ker u \cap \ker v$, alors $(u + v)(x) = 0$, donc $x \in N$, et $w(x) = 0$. Ainsi $\ker w = \ker u \cap \ker v$.

Conclusion. Le théorème du rang appliqué à w , dont l'espace de départ N est de dimension finie, donne :

$$\dim N = \dim \ker w + \text{rg } w \leq \dim(\ker u \cap \ker v) + \dim(\text{Im } u \cap \text{Im } v)$$

Ce qu'il fallait démontrer.

L'inégalité est optimale : pour $v = -u$, on a $\ker(u + v) = E$, et le membre de droite vaut $\text{rg } u + \dim \ker u = \dim E$ par le théorème du rang.

4 Perturbation de rang un

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$, φ une forme linéaire sur E et $a \in E$. On note f l'endomorphisme $x \mapsto x + \varphi(x)a$ de E .

Montrer que $\det(f) = 1 + \varphi(a)$.

Écartons d'abord deux cas dégénérés. Si $\varphi = 0$ ou $a = 0$, alors $f = \text{Id}_E$ et $\det(f) = 1 = 1 + \varphi(a)$. Supposons désormais $\varphi \neq 0$ et $a \neq 0$: l'hyperplan $H = \ker \varphi$ est alors de dimension $n - 1$. **L'endomorphisme f coïncide avec l'identité sur H** , ce qui invite à choisir une base contenant une base de H . Deux cas se présentent selon la position de a .

Cas 1 : $a \notin H$, c'est-à-dire $\varphi(a) \neq 0$. Alors $E = H \oplus \text{Vect}(a)$, puisque $a \notin H$ et que H est un hyperplan. Soit $(e_1, \dots, e_{n-1})$ une base de H ; la famille $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_{n-1}, a)$ est une base de E dans laquelle

$$f(e_i) = e_i \quad (1 \leq i \leq n-1) \quad \text{et} \quad f(a) = a + \varphi(a)a = (1 + \varphi(a))a$$

La matrice de f dans $\mathcal{B}$ est donc $\text{diag}(1, \dots, 1, 1 + \varphi(a))$, de déterminant $1 + \varphi(a)$.

Cas 2 : $a \in H$, c'est-à-dire $\varphi(a) = 0$. Il s'agit de montrer que $\det(f) = 1$. Complétons a , qui est non nul, en une base $(a, e_2, \dots, e_{n-1})$ de H , puis choisissons $e_n \notin H$, de sorte que $\mathcal{B} = (a, e_2, \dots, e_{n-1}, e_n)$ est une base de E . On a $f(a) = a$, $f(e_i) = e_i$ pour $2 \leq i \leq n-1$, et

$$f(e_n) = e_n + \varphi(e_n)a$$

La matrice de f dans $\mathcal{B}$ est donc I_n à laquelle on a ajouté le coefficient $\varphi(e_n)$ en position $(1, n)$: c'est une matrice

triangulaire supérieure à diagonale de 1, de déterminant $1 = 1 + \varphi(a)$.

Dans tous les cas, $\det(f) = 1 + \varphi(a)$.

Remarque

Matriciellement, $f = \text{Id} + u$ où $u = \varphi(\cdot)a$ est de rang au plus 1, et le résultat s'écrit $\det(I_n + AL) = 1 + LA$ pour A colonne et L ligne : c'est le *lemme du déterminant de rang 1*. On en déduit par exemple que $I_n + AL$ est inversible si et seulement si $LA \neq -1$, ce qui est la clef de la formule de Sherman-Morrison pour l'inverse d'une matrice perturbée par un rang 1.

En dimension 2 ou 3, la formule redonne les déterminants des transvections ($\varphi(a) = 0$, déterminant 1) et des dilatations ($\varphi(a) \neq 0$).

5 Rang par blocs

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On pose $M = \begin{pmatrix} A & A \\ A & A+B \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$.

1. Exprimer le rang de M en fonction de A et B .

Les opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes ne changent pas le rang, et l'on peut les faire *par blocs* : retrancher le premier bloc de colonnes au second revient à retrancher, pour chaque j , la colonne j à la colonne $n+j$. On obtient successivement :

$$\text{rg } M = \text{rg} \begin{pmatrix} A & 0 \\ A & B \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

la première égalité par $C_2 \leftarrow C_2 - C_1$ sur les blocs de colonnes, la seconde par $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ sur les blocs de lignes.

Le rang d'une matrice diagonale par blocs est la somme des rangs des blocs : l'image de $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ est $\text{Im } A \times \text{Im } B$, vu dans $\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n = \mathbb{K}^{2n}$, de dimension $\text{rg } A + \text{rg } B$. Donc :

$$\text{rg } M = \text{rg } A + \text{rg } B$$

On peut formaliser les opérations par blocs comme des produits par des matrices inversibles, ce qui sera utile à la question suivante :

$$M = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ I_n & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$$

comme on le vérifie en effectuant le produit : le produit des deux derniers facteurs vaut $\begin{pmatrix} A & A \\ 0 & B \end{pmatrix}$, et multiplier à gauche par la première matrice ajoute la première ligne de blocs à la seconde, ce qui donne $\begin{pmatrix} A & A \\ A & A+B \end{pmatrix} = M$.

2. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que M soit inversible, et calculer M^{-1} dans ce cas.

La matrice M est inversible si, et seulement si, $\text{rg } M = 2n$, c'est-à-dire, d'après la question 1, $\text{rg } A + \text{rg } B = 2n$. Comme $\text{rg } A \leq n$ et $\text{rg } B \leq n$, cela équivaut à $\text{rg } A = \text{rg } B = n$:

$$M \in \text{GL}_{2n}(\mathbb{K}) \iff A \in \text{GL}_n(\mathbb{K}) \text{ et } B \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$$

Dans ce cas, la factorisation de la question précédente s'inverse facteur par facteur, dans l'ordre inverse. Les deux matrices triangulaires par blocs ont pour inverses $\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -I_n & I_n \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} I_n & -I_n \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$, comme on le vérifie immédiatement, et la matrice diagonale par blocs a pour inverse $\begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix}$. Donc :

$$\begin{aligned}
M^{-1} &= \begin{pmatrix} I_n & -I_n \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -I_n & I_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} A^{-1} & -B^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -I_n & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{-1} + B^{-1} & -B^{-1} \\ -B^{-1} & B^{-1} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

On vérifie sur le produit MM^{-1} : le bloc en haut à gauche vaut $A(A^{-1} + B^{-1}) - AB^{-1} = I_n$, celui en haut à droite $-AB^{-1} + AB^{-1} = 0$, celui en bas à gauche $A(A^{-1} + B^{-1}) - (A+B)B^{-1} = I_n + AB^{-1} - AB^{-1} - I_n = 0$, et celui en bas à droite $-AB^{-1} + (A+B)B^{-1} = I_n$.

On peut aussi obtenir M^{-1} en résolvant par blocs le système $M \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$: la différence des deux lignes donne $BY = V - U$, soit $Y = B^{-1}(V - U)$, puis la première ligne $A(X + Y) = U$ donne $X = A^{-1}U - Y$.

6 Commuter avec tous

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et f un endomorphisme de E commutant avec tous les endomorphismes de E :

$$\forall g \in \mathcal{L}(E), \quad f \circ g = g \circ f$$

L'objet de l'exercice est de montrer que f est une homothétie.

1. Montrer que toute droite vectorielle de E est stable par f .

L'hypothèse porte sur *tous* les endomorphismes : il s'agit donc d'en choisir un qui soit taillé pour la droite considérée. Le candidat naturel est un projecteur sur cette droite, dont l'image est exactement la droite.

Soit x un vecteur non nul de E et $D = \text{Vect}(x)$. Complétons x en une base $(x, e_2, \dots, e_n)$ de E , et notons p le projecteur sur D parallèlement à $\text{Vect}(e_2, \dots, e_n)$, c'est-à-dire l'unique endomorphisme tel que $p(x) = x$ et $p(e_i) = 0$ pour $i \geq 2$.

L'hypothèse donne $f \circ p = p \circ f$. Évaluons en x :

$$f(p(x)) = f(x) \quad \text{et} \quad p(f(x))$$

d'où $f(x) = p(f(x))$. Or l'image de p est D , donc $f(x) \in D$.

Ainsi $f(D) \subseteq D$: toute droite est stable.

2. En déduire que, pour tout $x \in E$, il existe un scalaire λ_x tel que $f(x) = \lambda_x x$.

Pour $x = 0$, n'importe quel scalaire convient.

Pour $x \neq 0$, la question 1 donne $f(x) \in \text{Vect}(x)$, c'est-à-dire qu'il existe un scalaire λ_x tel que $f(x) = \lambda_x x$. Ce scalaire est de plus unique, puisque x est non nul.

⚠ Attention

À ce stade, le scalaire λ_x dépend *a priori* du vecteur x , et c'est précisément ce qu'il reste à écarter. Conclure ici que f est une homothétie serait une faute : il reste à voir que le scalaire est le même pour tous les vecteurs, ce qui n'a rien d'évident.

3. Conclure.

Il s'agit de montrer que λ_x ne dépend pas de x . On compare deux vecteurs non nuls, en distinguant selon qu'ils sont colinéaires ou non.

Soient x et y deux vecteurs non nuls de E .

Premier cas : (x, y) est libre. Appliquons la question 2 au vecteur $x + y$, qui est non nul :

$$\lambda_{x+y}(x + y) = f(x + y) = f(x) + f(y) = \lambda_x x + \lambda_y y$$

En regroupant :

$$(\lambda_{x+y} - \lambda_x)x + (\lambda_{x+y} - \lambda_y)y = 0$$

La famille (x, y) étant libre, les deux coefficients sont nuls, d'où $\lambda_x = \lambda_{x+y} = \lambda_y$.

Second cas : $y = \mu x$ avec $\mu \neq 0$. Alors :

$$\lambda_y y = f(y) = f(\mu x) = \mu f(x) = \mu \lambda_x x = \lambda_x y$$

et comme $y \neq 0$, il vient $\lambda_y = \lambda_x$.

Dans les deux cas les scalaires coïncident. Il existe donc un scalaire λ tel que $f(x) = \lambda x$ pour tout $x \in E$, autrement dit :

$$f = \lambda \text{Id}_E$$

Réciproquement, toute homothétie commute évidemment avec tout endomorphisme.

Les endomorphismes cherchés sont donc exactement les homothéties.

Remarque

En termes matriciels, on vient de déterminer le *centre* de l'algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: ce sont les matrices scalaires λI_n .

7 Puissances de sommes

Soient $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{C}$. On note M la matrice $\left((a_i + b_j)^{n-1} \right)_{1 \leq i, j \leq n}$.

1. Écrire M comme le produit de deux matrices carrées.

La formule du binôme développe chaque coefficient en une somme de n termes, chacun produit d'un facteur ne dépendant que de i par un facteur ne dépendant que de j : c'est exactement la structure d'un produit matriciel.

$$(a_i + b_j)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} a_i^k b_j^{n-1-k}$$

Posons donc, pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$:

$$A_{i,k} = \binom{n-1}{k} a_i^k \quad \text{et} \quad B_{k,j} = b_j^{n-1-k}$$

Alors $(AB)_{i,j} = \sum_k A_{i,k} B_{k,j} = (a_i + b_j)^{n-1}$, c'est-à-dire $M = AB$, les indices de sommation k courant de 0 à $n-1$.

2. En déduire $\det(M)$.

Il reste à calculer les deux déterminants, qui sont tous deux des Vandermonde à peine déguisés. On note $V(x_1, \dots, x_n) = \det(x_i^{j-1}) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$ le déterminant de Vandermonde.

Le déterminant de A . La colonne k de A est $\binom{n-1}{k}$ fois la colonne $(a_i^k)_i$: en sortant ces scalaires par linéarité,

$$\det(A) = \prod_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \times V(a_1, \dots, a_n)$$

Le déterminant de B . La ligne k de B est $(b_j^{n-1-k})_j$: les puissances apparaissent dans l'ordre *décroissant*, de $n-1$ à 0. En renversant l'ordre des lignes, on obtient la transposée d'un Vandermonde, de déterminant $V(b_1, \dots, b_n)$. Le renversement de n lignes est une permutation de signature $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ — c'est la permutation $k \rightarrow n-1-k$, qui possède $\frac{n(n-1)}{2}$ inversions. Donc :

$$\det(B) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} V(b_1, \dots, b_n)$$

Conclusion. Par multiplicativité :

$$\det(M) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)(b_j - b_i)$$

Vérification. Pour $n=2$, la formule donne $-(a_2 - a_1)(b_2 - b_1)$, et le calcul direct :

$$\begin{vmatrix} a_1 + b_1 & a_1 + b_2 \\ a_2 + b_1 & a_2 + b_2 \end{vmatrix} = (a_1 + b_1)(a_2 + b_2) - (a_1 + b_2)(a_2 + b_1) = -(a_2 - a_1)(b_2 - b_1)$$

Remarque

La factorisation $M = AB$ montre au passage que le rang de M est au plus n quelle que soit la taille : si l'on prend $m > n$ points a_i et b_j , la matrice $((a_i + b_j)^{n-1})$ de taille m est de rang au plus n , donc de déterminant nul.

8 Inverses des nombres premiers

Soit $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite strictement croissante des nombres premiers. Montrer que la série $\sum \frac{1}{p_n}$ diverge.

L'idée est de raisonner par l'absurde en supposant la série convergente, ce qui entraînerait la convergence d'une suite de produits reliée par unicité de la décomposition en facteurs premiers à la série harmonique, dont on sait qu'elle diverge.

Supposons par l'absurde que $\sum \frac{1}{p_n}$ converge. Comme $-\ln\left(1 - \frac{1}{p_n}\right) \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{p_n}$ et que les deux termes généraux sont positifs, la série $\sum -\ln\left(1 - \frac{1}{p_n}\right)$ converge également, par théorème d'équivalence pour les séries à termes positifs.

En passant à l'exponentielle des sommes partielles, on en déduit que la suite de terme général :

$$u_N = \prod_{n=1}^N \frac{1}{1 - \frac{1}{p_n}}$$

converge (vers l'exponentielle de la somme de la série précédente).

Or, pour tout $M \geq 1$, en développant chaque facteur en série géométrique :

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{p_n}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{p_n^k} \geq 1 + \frac{1}{p_n} + \dots + \frac{1}{p_n^M}$$

d'où, en développant le produit :

$$u_N = \prod_{n=1}^N \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{p_n^k} \geq \prod_{n=1}^N \left(1 + \frac{1}{p_n} + \dots + \frac{1}{p_n^M}\right)$$

En choisissant M suffisamment grand, le produit de droite, une fois développé, contient les inverses de tous les entiers compris entre 1 et p_N : en effet, tout entier $i \in \llbracket 1, p_N \rrbracket$ ne fait intervenir dans sa décomposition en facteurs premiers que des nombres premiers inférieurs ou égaux à p_N , donc parmi $p_1, \dots, p_N$. On obtient ainsi :

$$u_N \geq \sum_{i=1}^{p_N} \frac{1}{i}$$

Ceci est absurde, car le membre de droite, somme partielle de la série harmonique, tend vers $+\infty$ quand $N \rightarrow +\infty$ (puisque $p_N \rightarrow +\infty$), alors que (u_N) a été supposée convergente. Cette contradiction établit la divergence de $\sum \frac{1}{p_n}$.

