

* L'intégrale $A = \int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}} dx$ est impropre en $+\infty$

** Elle cv car $e^{-\sqrt{x}} = o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ et $\frac{1}{\sqrt{x}}$ ne change pas de signe et l'intégrale $\int_7^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ cv d'ap. le critère de Riemann en $+\infty$.

*** Le cv $u = \sqrt{x}$ est C^1 et strict. $\uparrow$

sur $\underline{\underline{[0, +\infty[}}$ et $du = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$, d'où $dx = \underline{2u du}$

D'où $A = \int_0^{+\infty} e^{-u} \frac{2u du}{dx}$.

$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x}$

Les fonctions $f: u \mapsto -e^{-u}$ et $g: u \mapsto 2u$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ et le noyau $[f(u)g(u)]_0^{+\infty} = [-2ue^{-u}]_0^{+\infty}$ a une limite finie car $-2ue^{-u} \xrightarrow{u \rightarrow +\infty} 0$ par croissances comparées, d'où :

$$\begin{aligned} A &= [-2ue^{-u}]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} f g' \\ &= 0 - \int_0^{+\infty} -e^{-u} 2 du = 2[-e^{-u}]_0^{+\infty} \end{aligned}$$

Donc

$A = 2$.

* L'intégrale $B = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+2x+2} dx$ est impropre en $-\infty$

et en $+\infty$. Elle cv ssi les intégrales $B_1 = \int_{-\infty}^0$

(et) $B_2 = \int_0^{+\infty}$ convergent.

** $\frac{1}{x^2+2x+2} \sim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2}$ qui ne change pas de signe

et $\int_7^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ cv d'ap. le critère de Riemann en $+\infty$,
d'où l'intégrale B_1 cv. Et de m par B_2 .

Donc l'intégrale B cv.

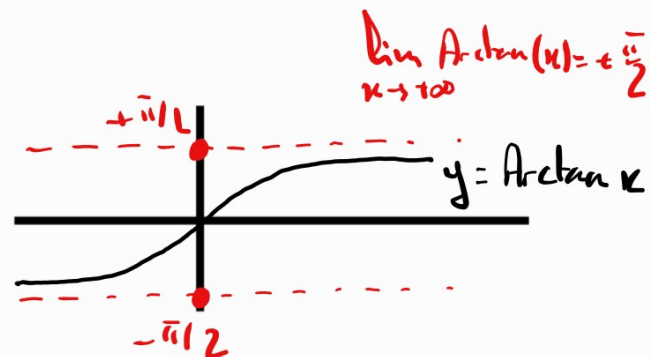
*** $x^2+2x+2 = (x+1)^2 + 1$. Le cv $u = x+1$ est C^1 et strictement $\nearrow$ sur $] -\infty, +\infty [$, d'où

$$B = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{u^2+1} du \quad \text{car } du = dx.$$

$$= [\text{Arctan}(u)]_{-\infty}^{+\infty}$$

$$= \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

Donc $B = \pi$.



$\lim_{x \rightarrow -\infty} \text{Arctan}(x) = -\frac{\pi}{2}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{Arctan}(x) = \frac{\pi}{2}$

* L'intégrale $C = \int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{1+t^2} dt$ est
impropre en 1 .

** $\frac{\ln(1-t)}{(1+t)^2} \underset{t \rightarrow 1}{\sim} \frac{\ln(1-t)}{4}$ qui ne change
pas de signe. Or l'intégrale $\int_0^1 \ln(1-t) dt$ cv
car $\int_0^1 \ln(x) dx$ cv d'ap. le cours.

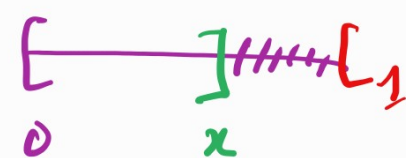
Donc l'intégrale C converge.

*** Par IPP: $C = \int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{1+t^2} dt = \int_0^1 f \cdot g'$
et les fonctions $f: t \mapsto \ln(1-t)$ et $g: t \mapsto \frac{1}{1+t}$
sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, 1[$. De plus, le
crochet $[f(t)g(t)]_0^1$ a une limite finie car
 $\ln(1-t) \times \frac{1}{1+t} \xrightarrow{t \rightarrow 1} -\infty \times (-2)$ 

Il nous manque une hyp. pour utiliser la prop 19.

On pose donc une barrière:

Soit $x \in [0, 1[$:



Par IPR : $c(x) = \int_0^x \frac{\ln(1-t)}{(1+t)^2} dt = \int_0^x f(t)g'(t)dt$ et

les fonctions $f: t \mapsto \ln(1-t)$ et $g: t \mapsto -\frac{1}{1+t}$

sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, x]$, d'où :

$$\begin{aligned} c(x) &= [f(t)g(t)]_0^x - \int_0^x f'(t)g(t)dt \\ &= \left[\ln(1-t) \cdot \frac{-1}{1+t} \right]_0^x - \int_0^x \frac{-1}{1-t} \times \frac{-1}{1+t} dt \\ &= -\frac{\ln(1-x)}{1+x} - \int_0^x \frac{1}{(1-t)(1+t)} dt \end{aligned}$$

On décompose en éléments simples :

$$\frac{1}{(1-t)(1+t)} = \frac{1/2}{1+t} + \frac{1/2}{1-t}, \text{ d'où}$$

$$\int_0^x \frac{1}{(1-t)(1+t)} dt = \frac{1}{2} \ln(1+x) - \frac{1}{2} \ln(1-x)$$

$$\text{Donc } c(x) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1+x} \right) \ln(1-x) - \frac{1}{2} \ln(1+x)$$

$$\text{Or } -\frac{1}{2} \ln(1+x) \xrightarrow{x \rightarrow 1} -\frac{1}{2} \ln(2)$$

$$\text{et } \frac{1}{2} - \frac{1}{1+x} = \frac{-(1-x)}{2(1+x)}, \text{ d'où}$$

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1+x} \right) \ln(1+x) = \underbrace{\frac{-1}{2(1+x)}}_{\xrightarrow{x \rightarrow 1} -\frac{1}{4}} \times \underbrace{(1-x) \ln(1+x)}_{\xrightarrow{x \rightarrow 1} 0 \text{ par c.c.}}$$

$$\text{D'où } c(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1} -\frac{1}{4} \times 0 = -\frac{1}{2} \ln(2).$$

" Donc $C = -\frac{1}{2} \ln(2)$ "

Rem : Parce que $c(x)$ possède une limite finie quand $x \rightarrow 1$, on peut aussi conclure :

" Donc l'intégrale C converge et $C = -\frac{1}{2} \ln 2$ "

ce qui dispense alors d'écrire le passage **.