

CORRIGÉ DE LA COLLE N° 02

Algèbre linéaire

3 octobre 2026

Exercice 1. 1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une unique matrice antisymétrique A , une unique matrice symétrique S et un unique réel $c \in \mathbb{R}$ tels que

$$M = A + S + cI_n \quad \text{et} \quad \text{Tr}(S) = 0.$$

2. En déduire la décomposition de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ en la somme directe de trois sous-espaces vectoriels.

1. Analyse : Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Supposons que $M = A + S + cI_n$, que $A \in \mathcal{A}_n$, $S \in \mathcal{S}_n$ et $\text{tr}(S) = 0$.

Alors $\text{tr}(M) = 0 + \text{tr}(S) + c \times \text{tr}(I_n) = nc$ car $\text{tr}(I_n) = n$ et les éléments diagonaux (et donc la trace) d'une matrice antisymétrique sont nuls, d'où $c = \frac{\text{tr}(M)}{n}$.

D'autre part, $M^T = -A + S + cI_n$, d'où $A = \frac{M - M^T}{2}$. Et $S = \frac{M + M^T}{2} - cI_n$. D'où l'unicité de (A, S, c) .

Synthèse : Posons $c = \frac{\text{tr}(M)}{n}$, $A = \frac{M - M^T}{2}$ et $S = \frac{M + M^T}{2} - cI_n$. Alors $M = A + S + cI_n$, $\text{tr}(S) = \text{tr}(M) - \frac{\text{tr}(M)}{n}n = 0$, la matrice A est antisymétrique et la matrice S est symétrique. D'où l'existence.

2. L'ensemble $\mathcal{S}_n \cap \text{Ker}(\text{tr})$ des matrices symétriques de trace nulle est un *sev* de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ car c'est l'intersection de deux *sev*. Et $\text{Vect}(I_n)$ est aussi un *sev*. De l'existence et de l'unicité de la décomposition $M = A + S + cI_n$, on tire que : $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{A}_n \oplus (\mathcal{S}_n \cap \text{Ker}(\text{tr})) \oplus \text{Vect}(I_n)$.

Exercice 2. Soit E un espace vectoriel.

1. Soient p et q deux endomorphismes de E tels que $p \circ q = q \circ p$. Montrer que :

$$\text{Ker}(p) + \text{Ker}(q) \subset \text{Ker}(p \circ q) \quad \text{et} \quad \text{Im}(p \circ q) \subset \text{Im}(p) \cap \text{Im}(q).$$

2. Soient p et q deux projecteurs de E tels que $p \circ q = q \circ p$. Montrer que :

- (a) $p \circ q$ est un projecteur ;
- (b) les inclusions précédentes sont des égalités.

Soit E un espace vectoriel.

1. Il suffit de montrer que : $\text{Ker}(p) \subset \text{Ker}(p \circ q)$ et $\text{Ker}(q) \subset \text{Ker}(p \circ q)$.

Hypothèse : $p \circ q = q \circ p$.

Soit $x \in \text{Ker}(p)$. D'où $p(x) = 0_E$, d'où $q \circ p(x) = q[p(x)] = q(0_E) = 0_E$, d'où $x \in \text{Ker}(q \circ p)$, d'où $x \in \text{Ker}(p \circ q)$ (car $p \circ q = q \circ p$).

Conclusion : $\text{Ker}(p) \subset \text{Ker}(p \circ q)$.

De même, $\text{Ker}(q) \subset \text{Ker}(p \circ q)$.

2. Par hypothèse, $p \circ p = p$, $q \circ q = q$ et $p \circ q = q \circ p$.

- (a) $(p \circ q) \circ (p \circ q) = (p \circ q) \circ (q \circ p) = p \circ (q \circ q) \circ p = p \circ q \circ p = p \circ p \circ q = p \circ q$, donc $p \circ q$ est un projecteur.

(b) Soit $x \in \text{Ker}(p \circ q)$. Ce vecteur x s'écrit $x = q(x) + [x - q(x)]$.

D'une part, $q(x) \in \text{Ker}(p)$ car $x \in \text{Ker}(p \circ q)$.

D'autre part, $x - q(x) \in \text{Ker}(q)$ car $q[x - q(x)] = q(x) - q \circ q(x) = q(x) - q(x) = 0_E$.

Donc $\text{Ker}(p \circ q) \subset \text{Ker}(p) + \text{Ker}(q)$. Et l'incusion dans l'autre sens a déjà été montrée, d'où l'égalité.

Soit $x \in \text{Im}(p) \cap \text{Im}(q)$.

D'une part, $\exists x_1 \in E$, $y = p(x_1)$ car $y \in \text{Im}(p)$. D'autre part, $\exists x_2 \in E$, $y = q(x_2)$ car $y \in \text{Im}(q)$.

Or $p \circ p = p$ car p est un projecteur. D'où $y = p(y) = p \circ q(x_2)$. D'où $y \in \text{Im}(p \circ q)$. Donc $\text{Im}(p) \cap \text{Im}(q) \subset \text{Im}(p \circ q)$. Et l'inclusion dans l'autre sens a déjà été montrée, d'où l'égalité.

Exercice 3. Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension 3 et un endomorphisme $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\varphi^3 = 0$ et $\varphi^2 \neq 0$. (On a noté $\varphi^2 = \varphi \circ \varphi$ et $\varphi^3 = \varphi \circ \varphi \circ \varphi$.)

1. Montrer qu'il existe un vecteur u_0 tel que la famille $(u_0, \varphi(u_0), \varphi^2(u_0))$ est une base de E .
2. Écrire la matrice de φ dans cette base.
3. En déduire qu'un endomorphisme commute avec φ si, et seulement si, il appartient à $\mathbb{K}[\varphi]$.
4. Déterminer tous les endomorphismes de $\mathbb{K}_2[X]$ qui commutent avec

$$\begin{array}{ccc} f : \mathbb{K}_2[X] & \rightarrow & \mathbb{K}_2[X] \\ P & \mapsto & P'. \end{array}$$

Voir, ci-dessous, le corrigé manuscrit de Louise.

Colle n°2 - Exercice 3

1) $\varphi^2 \neq 0$. Donc $\exists v_0 \in E, \varphi^2(v_0) \neq 0$

Soit $(\lambda, \mu, \gamma) \in K^3$, tels que

(1) $\lambda v_0 + \mu \varphi(v_0) + \gamma \varphi^2(v_0) = 0$

En composant par φ^2 ,

$\lambda \varphi^2(v_0) + \mu \varphi^3(v_0) + \gamma \varphi^4(v_0) = 0$

Donc

$\lambda \varphi^2(v_0) = 0$ car $\varphi^3 = 0$. Or $\varphi^2(v_0) \neq 0$.
Donc $\lambda = 0$

En composant (1) par φ

$\mu \varphi^2(v_0) + \gamma \varphi^3(v_0) = 0$

Donc

$\mu = 0$

Donc

$\gamma = 0$

Donc la famille $(v_0, \varphi(v_0), \varphi^2(v_0))$ est libre de cardinal 3 donc c'est une base

On:

2) On note $B = (v_0, \varphi(v_0), \varphi^2(v_0))$

$$A = [\varphi]_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} v_0 \\ \varphi(v_0) \\ \varphi^2(v_0) \end{matrix}$$

3) Soit ψ un endomorphisme de E représenté par la matrice $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$

On suppose $\psi \circ \psi = \psi \circ \psi$. Donc $\begin{pmatrix} b & c & 0 \\ e & f & 0 \\ h & i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$

Donc $M = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ d & a & 0 \\ g & d & a \end{pmatrix}$

$= aI_m + dA + gA^2$

fin

Donc

$\psi \in K[\psi]$

On suppose $\psi \in K[\psi]$

$\psi = a \text{id} + b\psi + c\psi^2$

car $\psi^3 = 0_{\mathcal{L}(E)}$

$\psi \circ \psi = a\psi + b\psi^2 + c\psi^3$

et

$\psi \circ \psi = a\psi + b\psi^2 + c\psi^3$

Donc $\psi \circ \psi = \psi \circ \psi$

4) Soit $P \in K[x]$

$f(P) = P'$, $f(P^2) = P''$, $f(P^3) = P^{(3)} = 0$

Donc les endo ψ commutent avec f sont

$\exists (a, b, c) \in K^3, \psi = a \text{id} + b\psi + c\psi^2$

Donc $\psi: P \mapsto aP + bP' + cP''$

$\exists (a, b, c) \in K^3,$