

L'intégrale $\mathcal{D} = \int_0^1 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} dx$ est impropre en 0.

$$\frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \underbrace{x^{1/4} \ln(x)} \times \frac{1}{x^{3/4}} = o\left(\frac{1}{x^{3/4}}\right)$$

car $\underbrace{x^{1/4} \ln(x)}_{x \rightarrow 0} \rightarrow 0$ par croissances comparées.

Or $\frac{1}{x^{3/4}}$ ne change pas de signe et $\int_0^1 \frac{1}{x^{3/4}} dx$ converge

d'après le critère de Riemann en 0 car $\frac{3}{4} < 1$.

Donc l'intégrale $\mathcal{D}$ converge.

Autre méthode (par IPP, en utilisant la prop. 19):

$\mathcal{D} = \int_0^1 f(t) g'(t) dt$ et les fonctions $f: t \mapsto \ln t$ et $g: t \mapsto 2\sqrt{t}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, 1[$. De plus, le crochet $[f(t)g(t)]_0^1$ a une limite finie car $2\sqrt{t} \ln(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$ par c.c.

D'après les intégrales $\mathcal{D}$ et $\int_0^1 f'(t)g(t) dt$ ont la même nature. Or l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{t} 2\sqrt{t} dt = 2 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt$ converge d'après le critère de Riemann en 0. Donc l'intégrale $\mathcal{D}$ converge.

Autre méthode (par IPP, en posant une barrière): $\int_0^1 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} dx$

Soit $x \in]0, 1[$: $d(x) = \int_x^1 f g'$ et les fonctions $f = \ln$ et $g = 2\sqrt{\cdot}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[x, 1]$.

$$\begin{aligned}
\text{Donc } d(x) &= [fg]_x^1 - \int_x^1 f'g \\
&= [2 \ln(t) \sqrt{t}]_x^1 - \int_x^1 \frac{1}{t} \times 2\sqrt{t} dt \\
&= -2 \ln(x) \sqrt{x} - 2 \int_x^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt \\
&= -2 \ln(x) \sqrt{x} - 4 [\sqrt{t}]_x^1 \\
&= -2 \ln(x) \sqrt{x} - 4 + 4\sqrt{x} \\
&\xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 - 4 + 0 \text{ par c.c.}
\end{aligned}$$

Donc l'intégrale $\geq$ cv (et $D = -4$).