

CORRIGÉ DU T.D. N° 3

Intégrales

4 octobre 2026

Exercice 1. Soit $F(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{t - \ln(t)} dt$.

1. Montrer que la fonction F est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que, pour tout $x > 0$,

$$F'(x) = \frac{\ln(2) - \ln(x)}{[2x - \ln(2x)][x - \ln(x)]}.$$

2. Montrer que, pour tout x strictement positif, $0 \leq F(x) \leq x$.

3. Déterminer un équivalent de $\frac{1}{t - \ln(t)} - \frac{1}{t}$ quand t tend vers $+\infty$ et calculer $\int_x^{2x} \frac{\ln t}{t^2} dt$ pour tout $x > 0$.

4. Étudier les limites en 0 et en $+\infty$ de la fonction F .

1. Pour tout $t > 0$, $\ln t \leq t - 1$ par concavité du logarithme. D'où $t - \ln t \geq 1$.

Ainsi la fonction $t \mapsto \frac{1}{t - \ln(t)}$ est continue sur $[x, 2x]$. Elle possède donc une primitive G : la fonction G est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $G'(t) = \frac{1}{t - \ln(t)}$ pour tout $t \in]0, +\infty[$. Alors $\int_x^{2x} \frac{1}{t - \ln(t)} dt = G(2x) - G(x)$, d'où $F(x) = G(2x) - G(x)$. La fonction F est dérivable (car G est dérivable) et

$$\forall x > 0, F'(x) = 2G'(2x) - G'(x) = 2 \frac{1}{2x - \ln(2x)} - \frac{1}{x - \ln(x)} = \frac{\ln(2) - \ln(x)}{[2x - \ln(2x)][x - \ln(x)]}.$$

2. De $t - \ln t \geq 1$, on tire que $0 \leq \frac{1}{t - \ln t} \leq 1$. Par croissance de l'intégrale, $0 \leq \int_x^{2x} \frac{1}{t - \ln(t)} dt \leq \int_x^{2x} 1 dt = 2x - x$. Donc

$$0 \leq F(x) \leq x.$$

3. On met en facteur le terme dominant : $\frac{1}{t - \ln(t)} - \frac{1}{t} = \frac{1}{t} \cdot \left[\frac{1}{1 - \frac{\ln t}{t}} - 1 \right]$. Puis on fait un D.L. : $\frac{\ln t}{t} \rightarrow 0$, d'où $\frac{1}{1 - \frac{\ln t}{t}} = 1 + \frac{\ln t}{t} + \frac{\ln t}{t} \varepsilon(t)$, où $\varepsilon(t)$ tend vers zéro quand t tend vers $+\infty$. D'où $\frac{1}{t - \ln(t)} - \frac{1}{t} = \frac{\ln t}{t^2} \cdot [1 + \varepsilon(t)]$. Donc

$$\frac{1}{t - \ln(t)} - \frac{1}{t} \sim \frac{\ln t}{t^2} \text{ si } t \text{ tend vers } +\infty.$$

Soit $x > 0$. On calcule $\int_x^{2x} \frac{\ln t}{t^2} dt$ en intégrant par parties : les fonctions $u : t \mapsto \ln t$ et $v : t \mapsto -\frac{1}{t}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$, d'où

$$\int_x^{2x} uv' = [uv]_x^{2x} - \int_x^{2x} u'v = \left[-\frac{\ln t}{t} \right]_x^{2x} + \int_x^{2x} \frac{1}{t^2} dt = \left[-\frac{\ln t}{t} \right]_x^{2x} + \left[-\frac{1}{t} \right]_x^{2x} = \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} - \frac{\ln(2x)}{2x} - \frac{1}{2x}.$$

4. De $0 \leq F(x) \leq x$, on tire grâce au théorème des gendarmes :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = 0^+.$$

Pour t assez grand (c'est-à-dire pour tout t supérieur à un certain T) :

– d'une part $\ln(t) \geq 0$, d'où $\frac{1}{t - \ln(t)} - \frac{1}{t} \geq 0$;

– d'autre part, $1 + \varepsilon(t) \leq 2$ (car $\varepsilon(t)$ tend vers zéro quand t tend vers $+\infty$).

Donc $\exists T > 0$, $\forall t \geq T$, $0 \leq \frac{1}{t - \ln(t)} - \frac{1}{t} \leq 2 \cdot \frac{\ln t}{t^2}$.

Par croissance de l'intégrale, si $x \geq T$, $0 \leq \int_x^{2x} \left(\frac{1}{t - \ln(t)} - \frac{1}{t} \right) dt \leq 2 \left[\frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} - \frac{\ln(2x)}{2x} - \frac{1}{2x} \right]$, donc (théorème des gendarmes) $\int_x^{2x} \left(\frac{1}{t - \ln(t)} - \frac{1}{t} \right) dt$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$. Autrement dit : $F(x) - \ln 2$ tend vers zéro, donc

$F(x)$ tend vers $\ln(2)$ si x tend vers $+\infty$.

Exercice 2. On note $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$ et on rappelle que $H_n - \ln(n)$ tend vers un réel γ appelé la *constante d'Euler*. Soit, pour tout réel $t > 0$,

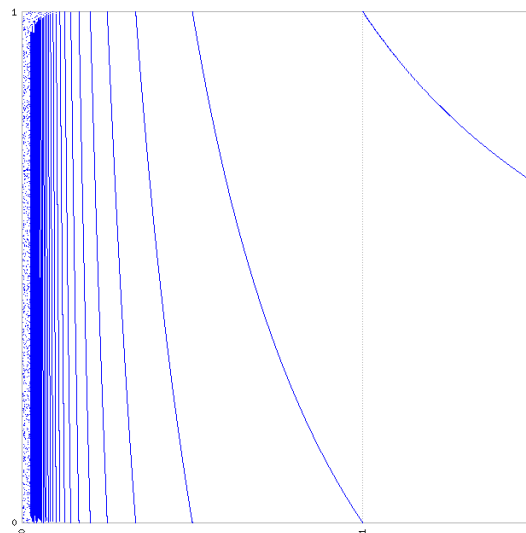
$$f(t) = \frac{1}{t} - \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor.$$

1. Représenter graphiquement la fonction f et justifier qu'elle est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$.
2. Montrer que l'intégrale $\int_0^1 f(t) dt$ est convergente.
3. Calculer, pour chaque entier $n \in \mathbb{N}^*$, le réel $I_n = \int_{1/n}^1 f(t) dt$.
4. En déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^1 f(t) dt$.

1. La fonction f est *cpm* sur $]0, +\infty[$ car (c'est la définition) elle est *cpm* sur chaque segment inclus dans $]0, +\infty[$. En effet, un tel segment contient un nombre fini de discontinuités en des abscisses $t_n = \frac{1}{n}$. Et, en chaque t_n , la fonction vaut $f(\frac{1}{n}) = 0$, a une limite à gauche égale à 0 et une limite à droite égale à 1.
2. $\forall t > 0$, $0 \leq f(t) \leq 1$. Or l'intégrale $\int_0^1 1 dt$ converge. Donc l'intégrale $\int_0^1 f(t) dt$ converge aussi.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$: $\int_{1/n}^1 f(t) dt = \int_{1/n}^1 \frac{1}{t} dt - \int_{1/n}^1 \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor dt$. La première intégrale vaut $\ln(n)$. La seconde vaut $\sum_{k=1}^{n-1} \int_{1/(k+1)}^{1/k} k dt = \sum_{k=1}^{n-1} k \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} = H_n - 1$. Donc $I_n = 1 + \ln(n) - H_n$.
4. D'après la première question, $I_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(t) dt$. D'après la seconde question, $I_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 - \gamma$. Donc $\int_0^1 f(t) dt = 1 - \gamma$ par unicité de la limite.

Exercice 3. Montrer que ces intégrales convergent et les calculer :

$$A = \int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}} dx \quad B = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2} \quad C = \int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{(1+t)^2} dt$$



Exercice 4. Etudiez la convergence des intégrales suivantes :

$$\begin{aligned}
 D &= \int_0^1 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} dx & E &= \int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} dx \\
 F &= \int_7^{+\infty} e^{-x} \ln(x) dx & G &= \int_0^7 e^{-x} \ln(x) dx \\
 H &= \int_0^1 \frac{e^{\sin t}}{t} dt & I &= \int_1^{+\infty} \frac{e^{\sin t}}{t} dt \\
 J &= \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t} + \sin t} dt & K &= \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx
 \end{aligned}$$

Exercice 5 (Oral Petites Mines 2010). Quelle est la nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x} \ln\left(\frac{2+x}{1+x}\right) dx$?

Notons $f: x \in]0, +\infty[\mapsto \frac{\arctan x}{x} \ln\left(\frac{2+x}{1+x}\right)$. L'intégrale $\int_0^{+\infty} f$ est impropre en 0 et en $+\infty$. Elle converge si, et seulement si, les deux intégrales $\int_0^1 f$ et $\int_1^{+\infty} f$ convergent.

La fonction f est continue sur $]0, 1]$ et a une limite finie en 0 (égale à $\ln 2$ car $\arctan x \sim x$), d'où l'intégrale $\int_0^1 f$ est convergente car elle est faussement impropre en 0.

Au voisinage de $+\infty$, on a $\ln\left(\frac{2+x}{1+x}\right) = \ln\left(\left(1 + \frac{2}{x}\right)\left(1 - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$, donc

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2x^2}$$

car $\arctan x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2}$. Or $\frac{1}{x^2}$ ne change pas de signe et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ converge (d'après le critère de Riemann en $+\infty$), ce qui montre que $\int_1^{+\infty} f$ converge.

Finalement, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f$ converge.

Exercice 6. On étudie la fonction $F:]-\infty, 1[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t} dt$ appelée le **dilogarithme**.

1. Montrer que l'intégrale $\int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{t} dt$ est convergente.

- On note $\lambda = - \int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{t} dt$. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x - 1} dx$ converge et qu'elle est égale à λ .
- Pour chaque $k \in \mathbb{N}^*$, montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} x e^{-kx} dx$ converge et la calculer.
- En déduire que, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \int_0^{+\infty} x \frac{1 - e^{-nx}}{e^x - 1} dx$.
- Montrer que, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq \lambda - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{n}$. Qu'en déduire ?

- L'intégrale $I = \int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{t} dt$ est impropre en 0 et en 1. Elle converge si, et seulement si, les deux intégrales $I_1 = \int_0^{1/2} \frac{\ln(1-t)}{t} dt$ et $I_2 = \int_{1/2}^1 \frac{\ln(1-t)}{t} dt$ convergent.

L'intégrale I_1 est impropre en 0. Or $\ln(1-t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} -t$, d'où $\frac{\ln(1-t)}{t} \underset{t \rightarrow 0}{\rightarrow} -1$. D'où l'intégrale I_1 converge car elle est faussement impropre.

L'intégrale I_2 est impropre en 1. Or $\frac{\ln(1-t)}{t} \underset{t \rightarrow 1^-}{\sim} \ln(1-t)$ qui ne change pas de signe et l'intégrale $\int_{1/2}^1 \ln(1-t) dt$ converge car l'intégrale de référence $\int_0^1 \ln(u) du$ converge. Donc l'intégrale I est convergente.

- Le CDV $x = -\ln(1-t)$, de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement monotone de $[0, 1[$ vers $[0, +\infty[$, d'où :

les intégrales $-\int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{t} dt$ et $-\int_0^{+\infty} \frac{-x}{1-e^{-x}} e^{-x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x - 1} dx$ ont la même nature, qui est de converger d'après la question 1. Et elles sont donc égales. [▷ Relire le théorème de CDV](#) : il énonce que (i) les natures sont les mêmes et (ii) les valeurs sont égales (si cette nature est de converger).

- On fait une IPP : $\int_0^a x e^{-kx} dx = \left[x \frac{e^{-kx}}{-k} \right]_0^a - \int_0^a \frac{e^{-kx}}{-k} dx \underset{a \rightarrow +\infty}{\rightarrow} \frac{1}{k^2}$ par croissances comparées. Donc l'intégrale converge et vaut $\frac{1}{k^2}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

- $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^n \int_0^{+\infty} x e^{-kx} dx = \int_0^{+\infty} x \left(\sum_{k=1}^n e^{-kx} \right) dx$.

Or, pour tout $x > 0$, $\sum_{k=1}^n e^{-kx} = e^{-x} \frac{1 - e^{-nx}}{1 - e^{-x}}$ en reconnaissant une somme géométrique de raison $e^{-x} \neq 1$. Donc

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \int_0^{+\infty} x \frac{1 - e^{-nx}}{e^x - 1} dx, \text{ cette dernière intégrale étant impropre en 0.}$$

- Soit $x \geq 0$. D'après le TAF, $\exists \epsilon \in]0, x[$, $e^x - e^0 = e^\epsilon \cdot (x - 0)$. Or $e^\epsilon \geq 1$. Donc $x \leq e^x - 1$.

(Autre méthode : dresser le tableau des variations de la fonction $[0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto e^x - x - 1$ pour montrer qu'elle est positive. Ou encore : utiliser la convexité de la fonction exp.)

- $\lambda - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x - 1} dx - \int_0^{+\infty} x \frac{1 - e^{-nx}}{e^x - 1} dx = \int_0^{+\infty} x \frac{e^{-nx}}{e^x - 1} dx$.

D'après la question précédente, pour tout $x > 0$, $x \leq e^x - 1$, d'où $0 \leq \frac{x}{e^x - 1} \leq 1$ en divisant par $e^x - 1 > 0$. D'où

$$0 \leq \int_0^{+\infty} x \frac{e^{-nx}}{e^x - 1} dx \leq \int_0^{+\infty} e^{-nx} dx = \frac{1}{n}. \text{ Donc, pour chaque } n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq \lambda - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{n}.$$

D'après la question précédente et en utilisant le théorème des gendarmes, la série $\sum \frac{1}{k^2}$ converge et $\lambda = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.

Exercice 7. Soit $f: x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \int_1^x \frac{e^t}{t} dt$.

Étudier la nature de l'intégrale $\int_0^1 \frac{e^t - 1}{t} dt$. En déduire un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers 0^+ .

Retrouver cet équivalent en utilisant la [▷ proposition 15 du chapitre III](#).

L'idée est de comparer $f(x)$ à $\int_1^x \frac{dt}{t} = \ln x$. Or

$$g(x) = f(x) - \ln x = \int_1^x \frac{e^t - 1}{t} dt$$

et la fonction $t \mapsto \frac{e^t - 1}{t}$ est prolongeable par continuité en 0 (par la valeur 1), Or l'intégrale $\int_0^1 \frac{e^t - 1}{t} dt$, impropre en 0, converge car elle est faussement impropre (en effet, $\frac{e^t - 1}{t}$ tend vers 1 quand t vers 0). Posons donc $\ell = \int_0^1 \frac{e^t - 1}{t} dt$. PREMIÈRE RÉDAC : D'où $f(x) = \ln x - \ell + o(1) = \ln x + o(\ln x)$. Donc $f(x) \sim \ln x$ quand x tend vers 0^+ . DEUXIÈME RÉDAC : D'où $f(x) = \ln x - \ell + o(1)$, d'où $\frac{f(x)}{\ln x} = 1 + \frac{-\ell + o(1)}{\ln x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 1 + 0$. Donc $f(x) \sim \ln x$ quand x tend vers 0^+ .

Exercice 8. Soient, pour chaque $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)t}{t} dt \quad \text{et} \quad b_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} dt.$$

1. Montrer que ces intégrales généralisées sont convergentes.
2. Montrer que la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante. Quelle est la valeur de cette constante ?
3. Montrer que l'intégrale généralisée $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ est convergente.
4. Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = I$.
5. (**Lemme de Riemann-Lebesgue**) Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. Montrer que :

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi/2} f(t) \sin(\lambda t) dt = 0.$$

6. Soit f la fonction définie sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ par

$$f(0) = 0 \quad \text{et} \quad f(t) = \frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t} \text{ si } t \neq 0.$$

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$.

7. Etudier $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n)$.

8. (**Intégrale de Dirichlet**) Montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$$

1. Les deux intégrales sont impropres en 0. Or $\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{\sin(2n+1)t}{t} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} 2n+1$, d'où : ces deux fonctions sont continues sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ et ont une limite finie en 0^+ , donc les intégrales a_n et b_n sont faussement impropres, donc convergentes.
2. $b_{n+1} - b_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+3)t - \sin(2n+1)t}{\sin t} dt$. Or $\sin(2n+3)t - \sin(2n+1)t = 2 \sin t \cdot \cos(2n+2)t$, d'où $b_{n+1} - b_n = 2 \int_0^{\pi/2} \cos(2n+2)t dt = 0$. Donc la suite (b_n) est constante (et égale à $b_0 = \frac{\pi}{2}$).
3. L'intégrale I est impropre en 0 et en $+\infty$: Elle converge si, et seulement si, les deux intégrales $I_0 = \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt$ et $I_1 = \int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ convergent.

L'intégrale I_0 est impropre en 0. Elle converge car c'est l'intégrale a_0 de la question 1.

L'intégrale I_1 est impropre en $+\infty$. On intègre par parties : $\int_{\pi}^x \frac{\sin t}{t} dt = \left[\frac{-\cos t}{t} \right]_{\pi}^x - \int_{\pi}^x \frac{\cos t}{t^2} dt$.

Or $\left[\frac{-\cos t}{t} \right]_{\pi}^x \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi}$ et l'intégrale impropre $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt$ converge car elle converge absolument car $\left| \frac{\cos t}{t^2} \right| \leq \frac{1}{t^2}$. D'où l'intégrale I_1 converge. Donc l'intégrale I converge.

4. Dans cette intégrale impropre en 0, on pose le changement de variable (de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement monotone) $u = (2n+1)t$ ($du = (2n+1)dt$, t va de 0 à $\pi/2$, d'où u va de 0 à $(2n+1)\pi/2$) : $a_n = \int_0^{(2n+1)\pi/2} \frac{\sin u}{u} du \xrightarrow{n \rightarrow \infty} I$ d'après la question 3.

5. On intègre par parties (c'est possible car f' est continue) :

$$\int_0^{\pi/2} f(t) \sin(\lambda t) dt = \left[-\frac{1}{\lambda} f(t) \cos(\lambda t) \right]_0^{\pi/2} + \frac{1}{\lambda} \int_0^{\pi/2} f'(t) \cos(\lambda t) dt.$$

Or $-\frac{1}{\lambda} [f(\pi/2) \cos(\lambda\pi/2) - f(0)] \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} 0$ car $\lambda \mapsto [f(\pi/2) \cos(\lambda\pi/2) - f(0)]$ est une fonction bornée.

Et $\frac{1}{\lambda} \int_0^{\pi/2} f'(t) \cos(\lambda t) dt \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} 0$ car $\lambda \mapsto \int_0^{\pi/2} f'(t) \cos(\lambda t) dt$ est une fonction bornée.

En effet $\left| \int_0^{\pi/2} f'(t) \cos(\lambda t) dt \right| \leq \int_0^{\pi/2} |f'(t) \cos(\lambda t)| dt \leq \int_0^{\pi/2} |f'(t)| dt$.

6. $\frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t} = \frac{t - \sin t}{t \sin t} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{t^3/6}{t^2} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t/6 \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$. Donc f est continue en 0. Ailleurs aussi.

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{\frac{1}{\sin h} - \frac{1}{h} - 0}{h} \stackrel{DL}{=} \frac{\frac{1}{1-h^2/6+h^2\varepsilon(h)} - 1}{h^2} = \frac{1}{6} + \varepsilon(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} \frac{1}{6}. \text{ D'où } f \text{ est dérivable en 0 et } f'(0) = \frac{1}{6}.$$

Pour tout $t \neq 0$, $f'(t) = \frac{-\cos t}{\sin^2 t} + \frac{1}{t^2}$. D'où $f'(t) \stackrel{DL}{=} -\frac{1-t^2/2+t^2\varepsilon(t)}{(t-t^3/6+t^3\varepsilon(t))^2} + \frac{1}{t^2} = -\frac{1-t^2/2+t^2\varepsilon(t)}{t^2-t^4/3+t^4\varepsilon(t)} + \frac{1}{t^2} = \frac{-\frac{1-t^2/2+t^2\varepsilon(t)}{1-t^2/3+t^2\varepsilon(t)} + 1}{t^2} = \frac{-(1-t^2/2+t^2/3+t^2\varepsilon(t)) + 1}{t^2} = \frac{1}{6} + \varepsilon(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} \frac{1}{6}$. D'où f' est continue en 0. Ailleurs aussi. Donc f est de classe $\mathcal{C}^1$.

AUTRE MÉTHODE — on utilise le théorème de la limite de la dérivée : avec la même preuve que ci-dessus, la fonction f est continue en 0. Avec la même preuve que ci-dessus, $f'(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} \frac{1}{6}$. Donc la fonction f est dérivable en 0 et sa dérivée est continue en 0.

7. $b_n - a_n = \int_0^{\pi/2} f(t) \sin(2n+1)t dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ d'après les deux questions précédentes.

8. On a montré que : a_n tend vers I , b_n est constant et égal à $\frac{\pi}{2}$, $b_n - a_n$ tend vers 0. Donc $I = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 9. 1. Montrer que les intégrales généralisées

$$A = \int_0^1 \frac{\ln t}{t-1} dt \quad \text{et} \quad B = \int_0^1 \frac{(\ln t)^2}{1-t} dt$$

sont convergentes.

2. Montrer que, pour chaque $n \geq 2$, le réel $a_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x+\dots+x^{n-1}} dx$ est égal à $\frac{1}{n} \int_0^1 \frac{t^{1/n}(1-t^{1/n})}{1-t} dt$.
3. Soient $t \in]0, 1]$ et, pour chaque $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = t^x(1-t^x)$. Montrer que la fonction f est deux fois dérivable. Calculer $f(0)$, $f'(0)$ et montrer que, pour tout $x \geq 0$, $|f''(x)| \leq 3(\ln t)^2$.
4. ▷ Réviser la formule de Taylor avec reste intégral.
En déduire que, pour tout $t \in]0, 1]$,

$$\left| t^{1/n}(1-t^{1/n}) + \frac{1}{n} \ln t \right| \leq \frac{3(\ln t)^2}{2n^2}$$

5. Montrer que $\left| a_n - \frac{A}{n^2} \right| \leq \frac{3B}{2n^3}$. En déduire un équivalent de a_n .

1. • L'intégrale $A = \int_0^1 \frac{\ln t}{t-1} dt$ est impropre en 0 et en 1 : soient $A_1 = \int_0^{1/2} \frac{\ln t}{t-1} dt$ et $A_2 = \int_{1/2}^1 \frac{\ln t}{t-1} dt$. L'intégrale A converge si, et seulement si, A_1 et A_2 convergent.

$\frac{\ln t}{t-1} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} -\ln t$ (qui ne change pas de signe), or $\int_0^{1/2} \ln t dt$ converge, d'où l'intégrale A_1 converge aussi.

L'intégrale A_2 converge car elle est faussement impropre en 1. En effet, $\frac{\ln t}{t-1} = \frac{\ln 1-u}{-u} = \frac{\ln 1-u}{-u}$ en posant $t = 1-u$ pour se ramener en 0. Et $\frac{\ln 1-u}{-u} = \frac{-u+o(u)}{-u} = -1+o(1) \xrightarrow{u \rightarrow 0} 1$.

• L'intégrale B converge si, et seulement si, les intégrales $B_1 = \int_0^{1/2} \frac{\ln^2 t}{1-t} dt$ et $B_2 = \int_{1/2}^1 \frac{\ln^2 t}{1-t} dt$ convergent.

$\frac{\ln^2 t}{1-t} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \ln^2 t$. Or l'intégrale $\int_x^{1/2} \ln^2 t dt = [t \ln^2 t]_x^{1/2} - 2 \int_x^{1/2} \ln t dt$ car les fonctions $t \mapsto t$ et $t \mapsto \ln^2 t$ sont de classe $\mathcal{C}^1$.
Or $[t \ln^2 t]_x^{1/2}$ a une limite finie quand x tend vers 0 par croissances comparées. D'où l'intégrale B_1 est de même nature que $\int_0^{1/2} \ln t dt$, qui est convergente. Donc l'intégrale B_1 converge.

$B_2 = \int_0^{1/2} \frac{\ln^2(1-x)}{x} dx$. Or $\frac{\ln^2(1-x)}{x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ tend vers 0. D'où l'intégrale B_2 est faussement impropre, donc elle converge.

2. L'intégrale $a_n = \int_0^1 \frac{(1-x)x^n}{1-x^n} dx$ est impropre en 1. On pose le changement de variable $t = x^n$ ($dt = nx^{n-1} dx$, x va de 0 à 1, d'où t va de 0 à 1) qui est bien de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement monotone. D'où $a_n = \frac{1}{n} \int_0^1 \frac{t^{1/n} (1-t^{1/n})}{1-t} dt$.
3. Soit $t \in]0, 1]$.

Pour chaque $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = t^x (1-t^x) = e^{x \ln t} (1 - e^{x \ln t})$, d'où $f(0) = 0$.

La fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ (car c'est un produit de fonctions deux fois dérivables) et $f'(x) = (1-2t^x)t^x \ln t$, d'où $f'(0) = -\ln t$.

Puis $f''(x) = t^x (1-4t^x) \ln^2 t$. Or, pour tout $x \geq 0$, $0 \leq t^x = e^{x \ln t} \leq 1$ car $t \in]0, 1]$ et $x \geq 0$, d'où $-3 \leq 1-4t^x \leq 1$, donc $|f''(x)| \leq 3 \ln^2 t$.

4. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ (car sa dérivée seconde est continue), d'où (formule de Taylor avec reste intégral) :

$$f(1/n) = f(0) + \frac{1}{n} f'(0) + \int_0^{1/n} \left(\frac{1}{n} - x \right) f''(x) dx. \text{ Donc, pour tout } t \in]0, 1] :$$

$$\begin{aligned} \left| t^{1/n} (1-t^{1/n}) + \frac{1}{n} \ln t \right| &= \left| \int_0^{1/n} \left(\frac{1}{n} - x \right) f''(x) dx \right| \\ &\leq \int_0^{1/n} \left(\frac{1}{n} - x \right) |f''(x)| dx \\ &\leq 3(\ln t)^2 \int_0^{1/n} \left(\frac{1}{n} - x \right) dx \\ &\leq \frac{3(\ln t)^2}{2n^2}. \end{aligned}$$

5. On sait que $\left| t^{1/n} (1-t^{1/n}) + \frac{1}{n} \ln t \right| \leq \frac{3(\ln t)^2}{2n^2}$ pour tout $t \in]0, 1]$.

$$\text{On divise par } 1-t > 0 : \left| \frac{t^{1/n} (1-t^{1/n})}{1-t} + \frac{1}{n} \frac{\ln t}{1-t} \right| \leq \frac{3}{2n^2} \frac{(\ln t)^2}{1-t} \text{ pour tout } t \in]0, 1[.$$

On intègre (c'est possible car toutes ces intégrales convergent d'après les questions précédentes) :

$$\int_0^1 \left| \frac{t^{1/n} (1-t^{1/n})}{1-t} + \frac{1}{n} \frac{\ln t}{1-t} \right| dt \leq \int_0^1 \frac{3}{2n^2} \frac{(\ln t)^2}{1-t} dt.$$

$$\text{D'où } \left| \int_0^1 \frac{t^{1/n} (1-t^{1/n})}{1-t} dt + \int_0^1 \frac{1}{n} \frac{\ln t}{1-t} dt \right| \leq \int_0^1 \frac{3}{2n^2} \frac{(\ln t)^2}{1-t} dt.$$

On divise par n : $\left| a_n - \frac{A}{n^2} \right| \leq \frac{3B}{2n^3}$. Puis par $\frac{A}{n^2}$ qui est strictement positif : $\left| \frac{a_n}{A/n^2} - 1 \right| \leq \frac{3B}{2An} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. D'où $\frac{a_n}{A/n^2} - 1$ tend vers 0 d'après le théorème des gendarmes. Autrement dit, $\frac{a_n}{A/n^2}$ tend vers 1. Donc $a_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{A}{n^2}$.

Exercice 10. 1. Quelle est la nature de l'intégrale généralisée $\int_2^{+\infty} \ln^\alpha(t) dt$, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$?

2. Après une intégration par parties, déterminer un équivalent, quand x tend vers $+\infty$, de $\int_2^x \ln^\alpha(t) dt$.

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$: $\frac{\ln^\alpha(t)}{1/t} = t \ln^\alpha(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty$ sans forme indéterminée si $\alpha \geq 0$ et par croissances comparées si $\alpha < 0$. D'où $\frac{1}{t} = o(\ln^\alpha(t))$ quand t tend vers $+\infty$. Or $\ln^\alpha(t)$ ne change pas de signe au voisinage de $+\infty$ et l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t} dt$ diverge. Donc l'intégrale $\int_2^{+\infty} \ln^\alpha(t) dt$ diverge aussi.

2. Soit $x \geq 2$. Les fonctions $u : t \mapsto \ln^\alpha(t)$ et $v : t \mapsto t$ sont de classe $\mathcal{C}^1$, d'où $\int_2^x uv' = [uv]_2^x - \int_2^x u'v$. Donc

$$\int_2^x \ln^\alpha(t) dt = x \ln^\alpha(x) - 2 \ln^\alpha(2) - \alpha \int_2^x \ln^{\alpha-1}(t) dt.$$

Or $\ln^{\alpha-1}(t) = o(\ln^\alpha(t))$ quand t tend vers $+\infty$. De plus $\ln^\alpha(t)$ est positif au voisinage de $+\infty$. Enfin l'intégrale $\int_2^{+\infty} \ln^\alpha(t) dt$ diverge. Donc $\int_2^x \ln^{\alpha-1}(t) dt = o\left(\int_2^x \ln^\alpha(t) dt\right)$ ▷ **proposition 15 du chapitre III**. Donc

$$\int_2^x \ln^\alpha(t) dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x \ln^\alpha(x).$$