

Exercice 4

Perci à Dhyae & Neji.

$$\textcircled{E} \quad \forall x \geq e, 0 \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \leq \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$$

Or l'intégrale $\int_e^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ diverge d'après le critère de Riemann ($\frac{1}{2} > 1$)

d'où l'intégrale $\int_e^{+\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} dx$ diverge, ~~à fortiori~~, $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} dx$ aussi.
dmc

Autre méthode :

$$E) \text{ L'intégrale } E = \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx \text{ est impropre en } +\infty$$

$$\text{Soit } x \in [1, +\infty[$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{x} \ln x} \times \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = o\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right) \quad \text{et } \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$$

ne change pas de
signe

or l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ div (diverge)

d'où $\text{l'intégrale } E = \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$ div

F)

L'intégrale $F = \int_7^{+\infty} e^{-x} \ln x \, dx$ est impropre en $+\infty$

Soit $x \in [7; +\infty[$,

$$e^{-x} \ln x = e^{-x/2} \times e^{-x/2} \ln x = o_{x \rightarrow +\infty} \left(e^{-x/2} \right) \text{ et } e^{-x/2} \text{ ne change pas de signe}$$

or l'intégrale $\int_7^{+\infty} e^{-x/2} \, dx$ cv

$$\text{car } -\frac{1}{2} < 0$$

d'où l'intégrale $F = \int_7^{+\infty} e^{-x} \ln x \, dx$ cv

G) L'intégrale $G = \int_0^7 e^{-x} \ln x \, dx$ est impropre en 0

Soit $x \in]0; 7]$,

$$e^{-x} \ln x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \ln x \text{ qui ne change pas de signe}$$

or l'intégrale $\int_0^7 \ln x \, dx$ cv

donc l'intégrale $\int_0^7 e^{-x} \ln x \, dx$ cv

d'où l'intégrale $G = \int_0^7 e^{-x} \ln x \, dx$ cv

H) L'intégrale $H = \int_0^1 \frac{e^{\sin t}}{t} dt$ est impropre en 0

$$e^{\sin t} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 1$$

d'où $\frac{e^{\sin t}}{t} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{t}$ qui ne change pas de signe

or l'intégrale $\int_0^1 \frac{dt}{t}$ dv

$$\text{d'où l'intégrale } H = \int_0^1 \frac{e^{\sin t}}{t} dt \text{ dv}$$

I) L'intégrale $I = \int_1^{+\infty} \frac{e^{\sin t}}{t} dt$ est impropre en $+\infty$

$$\forall t \in [1; +\infty[, 0 \leq \frac{e^{-1}}{t} \leq \frac{e^{\sin t}}{t} \text{ par croissance de l'exponentielle}$$

or l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-1}}{t} dt$ dv

$$\text{d'où l'intégrale } I = \int_1^{+\infty} \frac{e^{\sin t}}{t} dt \text{ dv}$$

3) L'intégrale $J = \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t} + \sin t} dt$ est impropre en $+\infty$

Soit $t \in [1; +\infty[$

$$\frac{\sin t}{\sqrt{t} + \sin t} = \frac{\sin t}{\sqrt{t}} \times \frac{1}{1 + \frac{\sin t}{\sqrt{t}}}$$

$$= \frac{\sin t}{\sqrt{t}} \times \left(1 - \frac{\sin t}{\sqrt{t}} + \underbrace{O\left(\frac{\sin^2 t}{t}\right)}_{t \rightarrow +\infty} \right)$$

$$= \frac{\sin t}{\sqrt{t}} - \frac{\sin^2 t}{t} + \underbrace{O\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right)}_{t \rightarrow +\infty} \quad \text{car } \frac{\sin^2 t}{t} = O\left(\frac{1}{t}\right)$$

* L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$ cr. car $\downarrow$

Oui mais inutile.

* ~~L'intégrale $\int_1^{+\infty} O\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right) dt$ cr d'après le critère de Riemann~~

$\left\{ \frac{\sin^2 t}{t} + O\left(\frac{\sin^2 t}{t}\right) \right\} \sim \frac{\sin^2 t}{t}$ qui ne change pas de signe et

* L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t} dt$ dv. car $\odot$,

d'in $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t} dt$ et $\frac{t}{t}$ aussi.

d'où l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t} + \sin t} dt$ dv



L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$ est impropre en $+\infty$

Les fonctions $\cos$ et $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ sont $\mathcal{C}^1$ sur $[1; +\infty[$

et $\frac{-\cos t}{\sqrt{t}} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$

d'où par intégration par parties

les intégrales $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{-\cos t}{-2t^{3/2}} dt$

sont de même nature

or $\frac{\cos t}{2t^{3/2}} = O\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right)$ et $\frac{1}{t^{3/2}}$ ne change pas de signe

et l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{3/2}}$ cv d'après le critère de Riemann

d'où l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{2t^{3/2}} dt$ cv

d'où l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$ cv



L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t} dt$ est impropre en $+\infty$

$$\forall t \in [1; +\infty[, \sin^2 t = 1 - \cos^2 t$$

$$= 1 - \frac{\cos(2t) + 1}{2}$$

$$= \frac{1 - \cos 2t}{2}$$

Les fonction $u: t \mapsto \frac{1}{2} \left(t - \frac{\sin 2t}{2} \right)$ et $v: t \mapsto \frac{1}{t}$

sont $\mathcal{C}^1$ sur $[1; +\infty[$

$u(t)v'(t) =$

$$\text{et } \frac{t - \frac{\sin 2t}{2}}{2t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}$$

d'où par intégration par parties,

$$\text{Les intégrales } \int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t} dt = \int_1^{+\infty} \frac{1 - \cos 2t}{2t} dt \quad \int_1^{+\infty} u'v$$

et $\int_1^{+\infty} \frac{t - \frac{\sin 2t}{2}}{2t^2} dt$ sont de même nature

or l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{t - \frac{\sin 2t}{2}}{2t^2} dt$ dv

c'est la somme de

car $\forall$ l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{2t} dt$ dv par critère de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t} dt$

et l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin 2t}{4t^2} dt$ cv

car $\frac{\sin 2t}{4t^2} = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et $\frac{1}{t^2}$ ne change pas de signe

et l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ cv

d'où l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t} dt$ cv

c'est la somme d'une intégrale dv et d'une intégrale cv.

K) L'intégrale $K = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ est impropre en $+\infty$

$$\forall x \geq 1 \quad -x^2 \leq -x$$

donc $0 \leq e^{-x^2} \leq e^{-x}$ par croissance
de l'exponentielle

or l'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{-x} dx$ cv

d'où l'intégrale $K = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ cv