

D.S. N° 2 DE MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures. Les calculatrices sont interdites.

Cet énoncé contient un exercice et un problème.

On attachera un grand soin à la rédaction. En particulier, chaque résultat ou conclusion devra être encadré.

On peut toujours admettre les résultats des questions précédentes pour traiter les questions suivantes.

PROBLÈME

Ce problème porte sur les matrices nilpotentes, c'est-à-dire les matrices M carrées telles que : $\exists k \in \mathbb{N}^*, M^k = 0$. On rappelle que l'indice de nilpotence d'une matrice nilpotente M est l'unique $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $M^k = 0$ et $M^{k-1} \neq 0$.

Notations

Dans tout ce problème, n désigne un entier naturel non nul et E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension n .

On pose $J_1 = (0) \in \mathcal{M}_1(\mathbb{C})$ et, pour chaque entier $\alpha \geq 2$, $J_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_\alpha(\mathbb{C})$.

On rappelle que les règles du calcul matriciel permettent d'additionner et de multiplier par blocs les matrices.

Si $A_1 \in \mathcal{M}_{n_1}(\mathbb{C})$, $A_2 \in \mathcal{M}_{n_2}(\mathbb{C})$, $\dots$, $A_k \in \mathcal{M}_{n_k}(\mathbb{C})$, alors on note $\text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_k)$ la matrice diagonale par blocs

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_k \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n_1+n_2+\dots+n_k}(\mathbb{C}).$$

Partie A – Étude d'un exemple

Pour chaque complexe β , on définit la matrice A_β de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ par :

$$A_\beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \beta + 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & \beta + 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que la matrice A_0 est nilpotente, déterminer son indice de nilpotence et montrer qu'elle est semblable à la matrice J_3 .
2. On suppose que $\beta \neq 0$. Montrer qu'il existe un vecteur colonne X non nul tel que $A_\beta X = \beta X$. La matrice A_β est-elle nilpotente ?

Partie B – Les matrices de carré nul

3. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Montrer que : si le déterminant et la trace de A sont nuls, alors $A^2 = 0$. La réciproque est-elle vraie ?

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice de rang r et de carré nul : $\text{rg}(A) = r$ et $A^2 = 0$.

4. Soit u l'endomorphisme représenté par la matrice A dans une base $\mathcal{B}$ de E . Montrer que :

$$\text{Im}(u) \subset \text{Ker}(u) \quad \text{et} \quad 2r \leq n.$$

On suppose dans la suite de cette partie que la dimension n de E est supérieure ou égale à 3.

5. On se place dans le cas où $\text{Im}(u) = \text{Ker}(u)$.

Montrer qu'il existe des vecteurs $e_1, e_2, \dots, e_r$ de E tels que la famille

$$\mathcal{B}' = (e_1, u(e_1), e_2, u(e_2), \dots, e_r, u(e_r))$$

est une base de E .

6. Exprimer la matrice de u dans cette base $\mathcal{B}'$. (On utilisera les matrices J_α et la notation diag indiquées au début de l'énoncé.)
7. On se place dans le cas où $\text{Im}(u) \neq \text{Ker}(u)$. Montrer que la matrice A est semblable à

$$\text{diag}(J_2, \dots, J_2, (0)_{n-2r})$$

avec r blocs diagonaux J_2 suivis de la matrice nulle $(0)_{n-2r}$ de $\mathcal{M}_{n-2r}(\mathbb{C})$.

Partie C – Endomorphismes échangeurs

On dit qu'un endomorphisme u de E est *échangeur* s'il existe des sous-espaces vectoriels F et G de E tels que :

$$E = F \oplus G, \quad u(F) \subset G \quad \text{et} \quad u(G) \subset F.$$

8. Soient p et q deux entiers naturels non nuls. Soient les matrices $A \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{C})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$ et

$$M = \begin{pmatrix} 0_p & B \\ A & 0_q \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p+q}(\mathbb{C}).$$

Montrer que la matrice M est la somme de deux matrices de carrés nuls.

9. Soit u un endomorphisme échangeur.

Montrer qu'il existe deux endomorphismes a et b tels que $u = a + b$, $a^2 = 0$ et $b^2 = 0$.

Soit u un endomorphisme bijectif de E tel que $u = a + b$, $a^2 = 0$ et $b^2 = 0$.

10. Montrer que $E = \text{Ker}(a) \oplus \text{Ker}(b)$, que $\text{Ker}(a) = \text{Im}(a)$ et que $\text{Ker}(b) = \text{Im}(b)$.

11. En déduire que u est échangeur.

Partie D - Sous-espaces vectoriels stables par un endomorphisme nilpotent

Soit u un endomorphisme nilpotent, d'indice p , de E .

12. Montrer qu'il existe un vecteur x de E tel que la famille $(u^k(x))_{0 \leq k \leq p-1}$ est libre.

Dans la suite, on note a un tel vecteur et $\mathcal{B}_a$ la famille libre $(u^k(a))_{0 \leq k \leq p-1}$.

13. Montrer que l'indice de nilpotence p de u est inférieur ou égal à la dimension n de E .

14. En déduire que la matrice A_0 de la première partie du problème ne possède aucune racine carrée, c'est-à-dire qu'il n'existe aucune matrice $R \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telle que $R^2 = A_0$.

15. Justifier que l'endomorphisme $w : \text{Im}(u) \rightarrow \text{Im}(u)$, $x \mapsto u(x)$ est bien défini. Montrer qu'il est nilpotent et déterminer son indice de nilpotence.

16. Montrer que le sous-espace vectoriel C_a engendré par la famille $\mathcal{B}_a$ est stable par u .

17. Soit v l'endomorphisme induit par u sur C_a . Déterminer la matrice de v dans la base $\mathcal{B}_a$.

18. Soit l'endomorphisme $f : \mathbb{C}_{p-1}[X] \rightarrow \mathbb{C}_{p-1}[X]$, $Q \mapsto Q'$. Montrer qu'il existe exactement $p + 1$ sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}_{p-1}[X]$ (que l'on déterminera) stables par l'endomorphisme f .

19. Construire une base de $\mathbb{C}_{p-1}[X]$ dans laquelle l'endomorphisme f est représenté par la matrice J_p .

20. En déduire tous les sous-espaces vectoriels de C_a stables par u .

Partie E - Matrices toutes-puissantes

On dit qu'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est *toute-puissante* si, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe une matrice B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A = B^k$.

21. Montrer que, si une matrice $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est nilpotente et toute-puissante, alors elle est nulle.

22. Soit V un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ tel que, au voisinage de 0 : $V(x) = o_{x \rightarrow 0}(x^n)$. Démontrer qu'il existe un polynôme Q de $\mathbb{R}[X]$ tel que $V = X^n Q$.

23. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Démontrer l'existence d'un polynôme U de $\mathbb{R}[X]$ tel que, au voisinage de 0 :

$$1 + x = (U(x))^p + o_{x \rightarrow 0}(x^n).$$

24. En déduire que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, il existe un polynôme Q de $\mathbb{R}[X]$ tel que : $1 + X = U^p + X^n Q$.

25. Soit une matrice $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente. Démontrer que la matrice $I_n + N$ est toute-puissante.

26. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ non nul. Montrer que la matrice $\lambda I_n + N$ est toute-puissante.

EXERCICE

En étudiant les formes linéaires sur l'espace vectoriel $E = \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$,
on se propose de montrer que tout hyperplan de E contient au moins une matrice inversible.
Et que la trace est, à un facteur près, l'unique forme linéaire f sur E telle que $f(M \cdot N) = f(N \cdot M)$.

Notations :

- n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.
- E désigne l'ensemble $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.
- L'ensemble $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ des formes linéaires sur E est noté E^* et est appelé le dual de E .
- $(E_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est la base canonique de E .
- Pour tout $r \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note K_r la matrice $\sum_{i=1}^r E_{i,i} = \text{diag}(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ avec r éléments diagonaux égaux à 1 suivis de $n - r$ zéros.
- Pour chaque $A \in E$, on définit la forme linéaire $T_A \in E^*$ par $T_A(M) = \text{tr}(AM)$. Et l'ensemble H_A par $H_A = \{M \in E \mid \text{tr}(AM) = 0\}$.

On pourra utiliser sans démonstration le théorème suivant, qui est au programme de la première année :

Si $A \in E$ est de rang $r \in \llbracket 1, n \rrbracket$, alors il existe deux matrices inversibles U et V de E telles que $UAV = K_r$.

1. Soit A une matrice de E .
 - (a) Montrer que : si A est une matrice symétrique, alors toute matrice antisymétrique appartient à H_A .
 - (b) Montrer que : si la matrice A n'est pas nulle, alors H_A est un hyperplan de E .
 - (c) Dans cette question seulement, on suppose $n = 2$ et $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Déterminer une base de H_A .
2. (a) Soit $A = (a_{k,l})_{(k,l) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$ une matrice de E . Pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, calculer $T_A(E_{i,j})$.
 (b) En déduire que, pour toute forme linéaire $f \in E^*$, il existe une unique matrice A de E telle que $f = T_A$.
 (c) En utilisant l'application $\varphi : E \rightarrow E^*, A \mapsto T_A$, en déduire la dimension du dual E^* .

3. On considère la matrice $P = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & & & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ de E .

- (a) Vérifier que P est inversible et que, pour tout $r \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la matrice P appartient à H_{K_r} .
 - (b) En déduire que chaque hyperplan H de E contient au moins une matrice inversible.

4. Soit une forme linéaire $f \in E^*$ telle que $f(M \cdot N) = f(N \cdot M)$ pour toutes matrices M et N de E .

On rappelle (inutile de le reprouver) qu'une matrice de E commute avec toutes les matrices de E si, et seulement si, elle est colinéaire à I_n .

En déduire qu'il existe un réel λ tel que $f = \lambda \text{tr}$.