

CORRIGÉ DU D.S. N° 2 DE MATHÉMATIQUES

PROBLÈME

Les parties B et D sont tirées de *Centrale 2019 PSI Math 2*,

la partie C de *Mines-Ponts 2017 PSI Math 2* et

la partie E de *CCINP 2013 MP Math 2*.

Partie A - Étude d'un exemple

1. On calcule : $A_0^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas nulle et $A_0^3 = A_0^2 \cdot A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Donc la matrice A_0 est nilpotente et son indice de nilpotence vaut 3.

Soit $X = (x \ y \ z)^T \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$:

- $A_0 X = 0 \iff \begin{cases} y = x \\ z = 0 \end{cases} \iff X = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. On choisit $V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- $A_0 X = V_3 \iff \begin{cases} z = 1 \\ x - y = 1 \\ -x + y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = 1 \\ x = 1 + y \end{cases} \iff X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. On choisit $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- $A_0 X = V_2 \iff \begin{cases} z = 1 \\ x - y = 0 \\ -x + y + z = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} z = 1 \\ x = y \end{cases} \iff X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. On choisit $V_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ces vecteurs V_1 , V_2 et V_3 sont linéairement indépendants car la matrice $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, de déterminant

$\det(P) = 1 \neq 0$, est inversible. Enfin $P^{-1} \cdot A_0 \cdot P = J_3$ par construction, donc

A_0 et J_3 sont semblables.

2. La matrice $A_\beta - \beta I_3 = \begin{pmatrix} -\beta & 0 & \beta + 1 \\ 1 & -\beta - 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible car $\begin{vmatrix} -\beta & 0 & \beta + 1 \\ 1 & -\beta - 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$
- $\begin{vmatrix} -\beta & 0 & \beta + 1 \\ -\beta & -\beta - 1 & \beta + 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$ par les opérations $C_1 \leftarrow C_1 + C_2$ et $C_3 \leftarrow C_3 - C_2$. Il existe donc un vecteur colonne $X \neq 0$ tel que $(A_\beta - \beta I_3)X = 0$.

De $A_\beta X = \beta X$, on tire que $A_\beta^k X = \beta^k X$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Or $\beta^k X \neq 0$ car $\beta \neq 0$ et $X \neq 0$. D'où

$A_\beta^k X \neq 0$, donc $A_\beta^k \neq 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Donc

la matrice A_β n'est pas nilpotente si $\beta \neq 0$.

Partie B – Les matrices de carré nul

3. Si le déterminant et la trace de la matrice $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ sont nuls, alors $\begin{cases} ad - bc = 0 \\ a + d = 0 \end{cases}$. Or $A^2 =$
- $$\begin{pmatrix} a^2 + bc & ac + cd \\ ba + bd & bc + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + bc & c(a+d) \\ b(a+d) & bc + d^2 \end{pmatrix}, \text{ donc } A^2 = 0.$$

Réciproquement : si $A^2 = 0$, alors $b(a+d) = 0 = c(a+d)$. Si $a+d \neq 0$, alors $b = 0 = c$, d'où $a^2 = 0 = d^2$, ce qui est absurde. D'où $\text{tr}(A) = a+d = 0$. Par suite, $\det(A) = ad - bc = -(a^2 + bc) = 0$.

Donc $A^2 = 0$ si, et seulement si, $\text{tr}(A) = 0$ et $\det(A) = 0$.

4. Soit $y \in \text{Im}(u)$, alors $\exists x \in E$, $y = u(x)$ d'où $u(y) = u^2(x) = 0$ d'où $y \in \text{Ker}(u)$. Donc $\text{Im}(u) \subset \text{Ker}(u)$.

Par suite, $r = \text{rg}(u) = \dim(\text{Im}(u)) \leq \dim(\text{Ker}(u))$. Par le théorème du rang, $r+r \leq \text{rg}(u) + \dim(\text{Ker}(u)) =$

$\dim(E) = n$, donc $2r \leq n$.

5. Soit H un supplémentaire de $\text{Ker}(u)$ dans E : $\dim(H) = r$. Soit alors $(e_1, \dots, e_r)$ une base de H . Montrons que la famille $(e_1, u(e_1), e_2, u(e_2), \dots, e_r, u(e_r))$ est libre. Soient $(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ et $(\mu_1, \dots, \mu_r)$ dans $\mathbb{C}^r$ tels que

$$\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_r e_r + \mu_1 u(e_1) + \dots + \mu_r u(e_r) = 0 \quad (*).$$

En appliquant u à cette égalité, il vient que $\lambda_1 u(e_1) + \dots + \lambda_r u(e_r) = 0$ car $u^2 = 0$. Par linéarité de u , $0 = \lambda_1 u(e_1) + \dots + \lambda_r u(e_r) = u(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_r e_r)$. Donc le vecteur $\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_r e_r$ est nul car il appartient à $H \cap \text{Ker}(u) = \{0\}$. D'où $\lambda_1 = \dots = \lambda_r = 0$ car la famille $(e_1, \dots, e_r)$ est libre. L'équation (*) devient alors

$$\mu_1 u(e_1) + \dots + \mu_r u(e_r) = 0.$$

Et, de même, le vecteur $\mu_1 e_1 + \dots + \mu_r e_r$ est nul car il appartient à $H \cap \text{Ker}(u) = \{0\}$. D'où $\mu_1 = \dots =$

$\mu_r = 0$. Finalement, $\mathcal{B}' = (e_1, u(e_1), e_2, u(e_2), \dots, e_r, u(e_r))$ est une base de E car cette famille

est libre et de cardinal $2r = \dim(E)$.

6. Pour chaque $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$, u envoie e_k sur $u(e_k)$. Et $u^2 = 0$, d'où $u(u(e_k)) = 0$.

Donc la matrice de u dans la base $\mathcal{B}'$ est

$\text{diag}(J_2, \dots, J_2)$ avec r blocs diagonaux J_2 .

7. Soit H un supplémentaire de $\text{Ker}(u)$ dans E : $\dim(H) = r$. Soit alors $(e_1, \dots, e_r)$ une base de H . Comme dans la question 5, la famille $(u(e_1), \dots, u(e_r))$ est libre. Elle est de cardinal r et ses vecteurs appartiennent tous à $\text{Ker}(u)$ car $u^2 = 0$. Or $\text{Ker}(u)$ est de dimension $n - r > r$ car $\text{Im}(u) \subset \text{Ker}(u)$ et $\text{Im}(u) \neq \text{Ker}(u)$. Donc on peut compléter cette famille en une base de $\text{Ker}(u)$, en rajoutant $(n - r) - r = n - 2r$ vecteurs de $\text{Ker}(u)$, que l'on note $(v_1, \dots, v_{n-2r})$.

La décomposition $E = H \oplus \text{Ker}(u)$ montre que, en concaténant la base $(e_1, \dots, e_r)$ de H et la base $(u(e_1), \dots, u(e_r), v_1, \dots, v_{n-2r})$ de $\text{Ker}(u)$, on obtient une base de E .

En réordonnant cette base,

$(e_1, u(e_1), e_2, u(e_2), \dots, e_r, u(e_r), v_1, \dots, v_{n-2r})$ est une base $\mathcal{C}$ de E .

Pour chaque $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$, u envoie e_k sur $u(e_k)$ et $u(u(e_k)) = 0$ car $u^2 = 0$. De plus les vecteurs $v_1, \dots, v_{n-2r}$ appartiennent à $\text{Ker}(u)$ donc $\forall k \in \llbracket 1, n-2r \rrbracket$, $u(v_k) = 0$.

On en déduit que la matrice de u dans la base $\mathcal{C}$ est

$\text{diag}(J_2, \dots, J_2, (0)_{n-2r})$ avec r blocs diagonaux J_2 suivis de la matrice nulle $(0)_{n-2r}$ de $\mathcal{M}_{n-2r}(\mathbb{C})$.

Partie C – Endomorphismes échangeurs

8. Un calcul par blocs montre que $\begin{pmatrix} 0_n & B \\ 0_{p,n} & 0_p \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0_n & 0_{n,p} \\ 0_{p,n} & 0_p \end{pmatrix} = 0_{n+p}$ et aussi que $\begin{pmatrix} 0_n & 0_{n,p} \\ A & 0_p \end{pmatrix}^2 = 0_{n+p}$.

Donc $M = \begin{pmatrix} 0_n & 0_{n,p} \\ A & 0_p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0_n & B \\ 0_{p,n} & 0_p \end{pmatrix}$ est la somme de deux matrices de carrés nuls.

9. Si F ou G est réduit $\{0_E\}$, alors il suffit de poser $a = 0$ ou $b = 0$, sinon : soit $\mathcal{D}$ une base de $E = F \oplus G$ obtenue en concaténant une base de F et une base de G . Dans cette base, la matrice de l'endomorphisme échangeur u est de la forme $\begin{pmatrix} 0_p & B \\ A & 0_q \end{pmatrix}$ car $u(F) \subset G$ et $u(G) \subset F$. En notant a et b les endomorphismes représentés par les matrices respectives $\begin{pmatrix} 0_n & 0_{n,p} \\ A & 0_p \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0_n & B \\ 0_{p,n} & 0_p \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{D}$,

il vient $u = a + b$, $a^2 = 0$ et $b^2 = 0$ d'après la question précédente.

10. Si $x \in \text{Ker}(a) \cap \text{Ker}(b)$, alors $u(x) = a(x) + b(x) = 0$ et l'injectivité de u entraîne $x = 0$. Ceci montre que $\text{Ker}(a)$ et $\text{Ker}(b)$ sont en somme directe. Soit $x \in E$. Comme u est bijectif, $x = u(u^{-1}(x)) =$

$a(u^{-1}(x)) + b(u^{-1}(x)) \in \text{Ker}(a) + \text{Ker}(b)$ puisque $a^2 = b^2 = 0$. Ainsi $E = \text{Ker}(a) \oplus \text{Ker}(b)$.

Comme $a^2 = b^2 = 0$, l'inégalité de la question 4 appliquée à a et à b donne $\dim(\text{Ker}(a)) \geq \frac{n}{2}$ et $\dim(\text{Ker}(b)) \geq \frac{n}{2}$. D'où

$$n \geq \dim(\text{Ker}(a) \oplus \text{Ker}(b)) = \dim(\text{Ker}(a)) + \dim(\text{Ker}(b)) \geq 2 \times \frac{n}{2} = n.$$

Ces inégalités sont alors des égalités, ce qui prouve que $\dim(\text{Ker}(a) \oplus \text{Ker}(b)) = \dim(E)$ et $\dim(\text{Ker}(a)) = \dim(\text{Ker}(b)) = \frac{n}{2}$. Le théorème du rang appliqué à a et à b donne ensuite $\dim(\text{Im}(a)) = \dim(\text{Ker}(a))$ et

$\dim(\text{Im}(b)) = \dim(\text{Ker}(b))$. Donc

$\text{Im}(a) = \text{Ker}(a)$ et $\text{Im}(b) = \text{Ker}(b)$

par inclusion et égalité des

dimensions.

11. Posons $F = \text{Ker}(a)$ et $G = \text{Ker}(b)$. La question précédente donne $E = F \oplus G$ et :

— pour tout $x \in F$, $u(x) = a(x) + b(x) = b(x) \in \text{Im}(b) = \text{Ker}(b) = G$, et donc $u(F) \subset G$;

— pour tout $x \in G$, $u(x) = a(x) + b(x) = a(x) \in \text{Im}(a) = \text{Ker}(a) = F$, et donc $u(G) \subset F$.

Ainsi l'endomorphisme u est échangeur.

Partie D - Sous-espaces vectoriels stables par un endomorphisme nilpotent

12. $u^{p-1} \neq 0$ car l'indice de nilpotence de u est p . Par suite, il existe au moins un vecteur $x \in E$ tel que $u^{p-1}(x) \neq 0_E$.

Soient p complexes $\alpha_0, \dots, \alpha_{p-1}$ tels que $\alpha_0 x + \dots + \alpha_{p-1} u^{p-1}(x) = 0_E$. En appliquant u^{p-1} , il vient $\alpha_0 u^{p-1}(x) = 0_E$ car $u^p = 0$. D'où $\alpha_0 = 0$ car $u^{p-1}(x) \neq 0_E$. De même, en appliquant successivement $u^{p-2}, \dots, u$, les autres scalaires $\alpha_1, \dots, \alpha_{p-1}$ sont nuls. Donc la famille $(u^k(x))_{0 \leq k \leq p-1}$ est libre.

13. La famille $\mathcal{B}_a$ est une famille libre de p vecteurs de E , espace vectoriel de dimension n , d'où $p \leq n$.

14. Par l'absurde : supposons que $R^2 = A_0$. D'une part, $A_0^2 \neq 0$, d'autre part $A_0^3 = 0$ car l'indice de nilpotence de la matrice A_0 est 3, d'après la question 1. Par suite $R^4 \neq 0$ et $R^6 = 0$. La matrice R est ainsi nilpotente et son indice de nilpotence est 5 ou 6, donc strictement supérieur à 3, ce qui est absurde d'après la question précédente.

15. L'endomorphisme w est bien défini car le *sev* $\text{Im}(u)$ est stable par u . Soit $y \in \text{Im}(u)$: il existe $x \in E$ tel que $y = u(x)$. D'où $w^{p-1}(y) = u^{p-1}(y) = u^p(x) = 0$, donc l'endomorphisme w est nilpotent.

De plus, il existe $x \in E$ tel que $u^{p-1}(x) \neq 0$. Le vecteur $y = u(x)$ appartient alors à $\text{Im}(u)$ et $w^{p-2}(y) = u^{p-2}(y) = u^{p-1}(x) \neq 0$. L'indice de nilpotence de w est donc $p - 1$.

16. La famille $\mathcal{B}_a$ est une base du sous-espace vectoriel C_a . Chaque vecteur $u^k(a)$ de cette base a pour image le vecteur $u(u^k(a)) = u^{k+1}(a)$ qui appartient au sous-espace vectoriel C_a car : c'est un vecteur de la famille $\mathcal{B}_a$ si $k < p - 1$ et c'est le vecteur nul si $k = p - 1$.

Donc le sous-espace vectoriel C_a engendré par la famille $\mathcal{B}_a$ est stable par u .

17. Pour chaque $k \in \llbracket 0, p - 2 \rrbracket$, $v(u^k(a)) = u(u^k(a)) = u^{k+1}(a)$ et $v(u^{p-1}(a)) = u^p(a) = 0_E$, donc

la matrice de v dans la base $\mathcal{C}_a$ est J_p .

18. Pour tout polynôme Q de $\mathbb{C}[X]$, $\deg(Q') \leq \deg(Q)$, d'où :

les $p + 1$ *sev* $\{0_{\mathbb{C}[X]}\}, \mathbb{C}_0[X], \dots, \mathbb{C}_{p-1}[X]$ sont stables par la dérivation f . Et ce sont les seuls.

En effet : si F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}_{p-1}[X]$, alors l'ensemble des degrés des polynômes de F est une partie de $\mathbb{N}$ majorée (par $p - 1$), donc elle possède un maximum d . Soit alors un polynôme $Q \in F$ de degré d . Si F est stable par f , alors les $d + 1$ polynômes $Q, Q', \dots, Q^{(d)}$ appartiennent à F . Et ils sont de degrés $d, d - 1, \dots, 0$ respectivement. D'où $F = \mathbb{C}_d[X]$.

19. Soit, pour chaque $k \in \llbracket 0, p - 1 \rrbracket$, le polynôme $Q_k = \frac{1}{k!} X^k$. La dérivée de Q_k est $f(Q_k) = \frac{k}{k!} X^{k-1} = Q_{k-1}$ si $k \geq 1$ et $f(Q_0) = f(1) = 0$.

Dans la base $(Q_{p-1}, \dots, Q_1, Q_0) = \left(\frac{X^{p-1}}{(p-1)!}, \dots, X, 1\right)$, la matrice de f est donc J_p .

20. La matrice J_p est :

- la matrice de l'endomorphisme v dans la base $(a, u(a), \dots, u^{p-1}(a))$ d'après la question 17 ;
- la matrice de l'endomorphisme f dans la base $\left(\frac{X^{p-1}}{(p-1)!}, \dots, X, 1\right)$ d'après la question 19.

Soit l'isomorphisme de $\mathbb{C}_{p-1}[X]$ vers C_a qui, pour chaque $k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$, associe au polynôme $\frac{X^k}{k!}$ le vecteur $u^{p-1-k}(a)$.

Cet isomorphisme associe, aux $p+1$ *sev* $\{0_{\mathbb{C}[X]}\}$, $\mathbb{C}_0[X] = \text{Vect}(X^0), \dots, \mathbb{C}_{p-1}[X] = \text{Vect}(X^0, \dots, X^{p-1})$ stables par la dérivation f , les $p+1$ *sev* $\{0_E\}$, $\text{Vect}(u^{p-1}(a)), \dots, \text{Vect}(u^{p-1}(a), \dots, a)$ stables par v .
Donc

les *sev* de C_a stables par u sont les $p+1$ *sev* $\{0_E\}$ et $F_k = \text{Vect}(u^{p-1}(a), \dots, u^{p-1-k}(a))$, où $k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$.

Partie E - Matrices toutes-puissantes

21. D'une part, la matrice $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est nilpotente, d'où $N^n = 0$. D'autre part, elle est toute-puissante, d'où il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $N = B^n$. Par suite, $0 = N^n = B^{(n^2)}$. D'où la matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est nilpotente. D'où $B^n = 0$. Donc la matrice N est nulle.
22. Ou bien $V = 0$, alors $V = X^n Q$, avec $Q = 0$. Ou bien $V(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} a_k x^k$, alors $k > n$ et $V(X) = \sum_{j=k}^{\deg V} a_j X^j = X^n Q$, où Q est le polynôme $\sum_{j=k}^{\deg V} a_j X^{j-n}$.
23. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Du développement limité $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n+1)}{n!} x^n + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$ avec $\alpha = \frac{1}{p}$, on déduit que $(1+x)^{1/p} = U(x) + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$, où

U est le polynôme $1 + \frac{1}{p}X + \frac{\frac{1}{p}(\frac{1}{p}-1)}{2!}X^2 + \dots + \frac{\frac{1}{p}(\frac{1}{p}-1) \dots (\frac{1}{p}-n+1)}{n!}X^n$

D'où $1+x = (1+x)^{p\alpha} = \left[U(x) + o_{x \rightarrow 0}(x^n)\right]^p = (U(x))^p + \sum_{k=1}^p \binom{p}{k} (U(x))^{p-k} o(x^{kn}) = (U(x))^p + o(x^n)$ car, pour chaque $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $(U(x))^{p-k} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1$ et $o(x^{kn})$ est négligeable devant x^n .

24. Des deux questions précédentes, il résulte que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, le polynôme $1 + X - (U(X))^p$ est divisible par X^n .
25. De l'égalité des polynômes $1 + X$ et $(U(X))^p + X^n Q(X)$, on tire l'égalité des matrices $I_n + N$ et $(U(N))^p + N^n Q(N)$. Or $N^n = 0$ car la matrice N est nilpotente. Donc, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, il existe un polynôme U tel que $I_n + N = (U(N))^p$. ce qui prouve que la matrice $I_n + N$ est toute-puissante.
26. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ non nul : $\lambda I_n + N = \lambda \left[I_n + \frac{1}{\lambda}N\right]$ en divisant par $\lambda \neq 0$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. D'une part, $\lambda = \mu^p$ en notant μ une racine p -ième du complexe λ . D'autre part, la matrice $\frac{1}{\lambda}N$ est nilpotente, ce qui rend la matrice $I_n + \frac{1}{\lambda}N$ toute-puissante d'après la question précédente. Il existe donc une matrice B telle que $I_n + \frac{1}{\lambda}N = B^p$. Par suite $\lambda I_n + N = (\mu B)^p$. Ceci est vrai pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, donc

la matrice $\lambda I_n + N$ est toute-puissante

EXERCICE

1. (a) Soit A une matrice symétrique : $A^T = A$. Soit M une matrice antisymétrique : $M^T = -M$. Alors $T_A(M) = \text{tr}(AM) = \text{tr}((AM)^T) = \text{tr}(M^T A^T) = \text{tr}(-MA) = -\text{tr}(MA) = -\text{tr}(AM) = -T_A(M)$. D'où $T_A(M) = 0$. Donc $M \in H_A$.
- (b) Soit $A \neq 0$. La fonction T_A est une forme linéaire et elle est non nulle car $T_A(A^T)$ est la somme des carrés des coefficients de la matrice $A \neq 0$.
- (c) Soit $M = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} : M \in H_A \iff a+b+c+d=0 \iff d=-a-b-c \iff M = a(E_{1,1}-E_{2,2}) +$

$b(E_{2,1}-E_{2,2})+c(E_{1,2}-E_{2,2})$. Donc

une base de H_A est $(E_{1,1} - E_{2,2}, E_{2,1} - E_{2,2}, E_{1,2} - E_{2,2})$.

2. (a) Pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$,

$$T_A(E_{ij}) = a_{j,i}$$

car c'est la trace de la matrice

$$A \cdot E_{i,j} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} i \begin{pmatrix} & & j & & \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = j \begin{pmatrix} & & j & & \\ 0 & \dots & 0 & a_{1,i} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{j,i} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,i} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

- (b) ANALYSE — Soient $f \in E^*$ et $A = (a_{i,j}) \in E$: si $f = T_A$, alors $f(E_{i,j}) = T_A(E_{i,j}) = a_{j,i}$ pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ d'après la question précédente. Ceci prouve l'unicité de la matrice A .

SYNTHÈSE — Soit $A \in E$ la matrice définie par $f(E_{i,j}) = a_{j,i}$ pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$. Alors $f(E_{i,j}) = T_A(E_{i,j})$ pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$. Or $(E_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$ est une base de E , d'où $f(M) = T_A(M)$ pour toute matrice $M \in E$. Donc $f = T_A$. Ceci prouve l'existence de la matrice A .

- (c) L'application φ est linéaire. Soient, en effet, A et B dans E et λ dans $\mathbb{R}$:

$$\forall M \in E, T_{\lambda A+B}(M) = \text{tr}((\lambda A + B)M) = \lambda \text{tr}(AM) + \text{tr}(BM) = \lambda T_A(M) + T_B(M).$$

Elle est de plus bijective d'après la question 2b. C'est donc un isomorphisme de E vers E^* . Ces

deux espaces vectoriels ont donc la même dimension. On conclut que

$$\dim E^* = \dim E = n^2$$

3. (a) L'ensemble des colonnes de P est une permutation des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Les

colonnes de P sont donc libres, par suite

P est une matrice inversible

$$\text{Pour tout } i \in \llbracket 1, n \rrbracket, E_{i,i}P = \begin{cases} E_{1,n} & \text{si } i = 1 \\ E_{i,i-1} & \text{si } i \geq 2 \end{cases} \quad \text{et donc } \text{tr}(E_{i,i}P) = 0$$

Puis, par linéarité de la trace, $T_{K_r}(P) = \sum_{i=1}^r \text{tr}(E_{i,i}P) = 0$, donc

P appartient à H_{K_r}

- (b) Soit H un hyperplan de E : c'est donc le noyau d'une forme linéaire non nulle f . D'après la question 2b, il existe une matrice $A \in E$ telle que $f = T_A$. Notons $r \in \llbracket 0, n \rrbracket$ le rang de cette matrice A . Remarquons que $r \neq 0$, sans quoi la matrice A serait nulle et la forme T_A aussi. Selon le théorème rappelé dans l'énoncé, il existe alors deux matrices inversibles U et V telles que $UAV = K_r$.

Or $P \in H_{K_r}$, d'où $\text{tr}(UAVP) = \text{tr}(K_r P) = 0$. D'après les propriétés de la trace et l'associativité du produit matriciel, $\text{tr}(U(AVP)) = \text{tr}((AVP)U) = \text{tr}(A(VPU)) = 0$, donc $VP U \in H_A$.

Comme les matrices V , P et U sont inversibles, la matrice $N = VPU$ l'est aussi et elle appartient à

$H_A = H$. En conclusion, tout hyperplan H de E contient au moins une matrice inversible

4. On sait grâce à la question 2b qu'il existe $A \in E$ telle que $f = T_A$. De $f(MN) = f(NM)$, on tire que $T_A(MN) = T_A(NM)$. D'où $\text{tr}(AMN) = \text{tr}(ANM)$. D'où $\text{tr}(AMN) = \text{tr}(MAN)$. D'où $\text{tr}[(AM - MA)N] = 0$.

Ceci est vrai pour toute matrice N , d'où la forme linéaire T_{AM-MA} est nulle. Donc la matrice $AM - MA$ est nulle, à nouveau d'après la question 2b.

Ceci est vrai pour toute matrice M . La matrice A commute donc avec toutes les matrices carrées. D'où $\exists \lambda \in \mathbb{R}, A = \lambda I_n$.

On conclut : $f = T_{\lambda I_n}$. Autrement dit :

$$f = \lambda \text{ tr}.$$